

## Список літератури

1. Божидарнік В.В., Максимович О.В., Максимович Я.В. Алгоритм та комплекси програм для розрахунку траєкторій та швидкості розповсюдження втомних тріщин в пластинках // Механічна втома металів: Праці міжнародного колоквиуму, Тернопіль, 25-28 вересня 2006.- Тернопільський державний технічний університет ім. Пулюя. – С. 456-461.
2. Кит Г.С., Кривцун М.Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. – Киев – Наук. думка, 1983. - 280 с.
3. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. –М.: Наука, 1966. –708 с.
4. Саврук М.П., Осив П.Н., Прокопчук И.В. Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – К.: Наук.думка, 1989. – 248 с.
5. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. В 2-х томах / Под ред. Ю. Мураками. –М.: Мир, 1990. - т. 1. – 448 с.

УДК 66.02.011

**О.С.Сахаров, д-р.техн.наук, В.І.Сівецький, канд.техн.наук,  
О.Л.Сокольський, канд.техн.наук., В.Ю.Щербина, канд.техн.наук  
Національний технічний університет України “КПІ”, м.Київ, Україна**

### **ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕЧІЇ В'ЯЗКОПЛАСТИЧНИХ СЕРЕДОВИЩ З УРАХУВАННЯМ ПРУЖНОСТІ КОНСТРУКТИВНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ОБЛАДНАННЯ**

---

*Целью данной работы является построение на базе моментной схемы конечных элементов универсальных соотношений механики сплошных сред, которые дают возможность моделировать термонапряженное состояние и процессы переработки и формования таких нелинейных рабочих сред, как расплавы полимеров, сыпучие и пластичные массы в изделия с учетом процессов твердения и влияния остаточных напряжений на свойства конечных изделий. Полученные на основе моментной схемы матрицы конечных элементов являются универсальными для решения задач механики как твердых тел, так жидкостей и газов. Это позволяет на современном уровне выполнять расчеты прочности и выносливости конструкций, разрабатывать новые технологические процессы переработки материалов с учетом их реальных свойств и особенностей взаимодействия с элементами оборудования.*

*The construction is the purpose of this work on the base of moment chart of finite elements of universal correlations of mechanics of continuous environments which enable to design the thermostress state and processes of processing and forming of such nonlinear working environments, as fusions of polymers, friable and plastic the masses in wares taking into account the processes of solidifiability and influencing of remaining tensions on properties of eventual wares. Got on the basis of moment chart of matrix of complete elements are universal for the decision of tasks of mechanics of solids, liquids and gases. It allows up-to-date to execute the calculations of durability and endurance of constructions, develop the new technological processes of processing of materials taking into account their real properties and features of co-operation with the elements of equipment.*

---

### **Вступ**

Сучасні технології хімічних виробництв супроводжуються використанням високих тисків та температур, які суттєво впливають і на матеріали, що переробляються, і на обладнання [1, 2]. В багатьох випадках врахування взаємодії матеріалів з силовими елементами машин та апаратів є необхідною умовою при розробці технологічних процесів і проектуванні обладнання хімічних виробництв.

Для адекватного описання взаємодії тіл різної природи використовуються загальні співвідношення нелінійної механіки суцільних середовищ (МСС), які базуються на фундаментальних законах збереження імпульсу та балансу механічної енергії, збереження енергії та маси [3]. Це вимагає розробки універсальних нелінійних моделей та методів їх дослідження, які можуть бути побудовані тільки на базі методів чисельного аналізу, орієнтованих на потужну обчислювальну техніку. До найбільш ефективних чисельних методів розв'язання складних реологічних і динамічних задач механіки суцільних середовищ належить метод скінчених елементів (МСЕ), який дозволяє на базі комп'ютерної техніки моделювати і досліджувати технологічні процеси разом з визначенням напружено деформованого стану і міцності обладнання.

Можливості МСЕ з точки зору описання реальних термомеханічних процесів в основному визначаються властивостями скінчених елементів, представлених через матриці жорсткості, в'язкості, теплопровідності та інш. Тому метою даної роботи є побудова на базі моментної схеми [4, 5, 6] універсальних співвідношень МСЕ, що дають можливість моделювати термонапружений стан та процеси переробки і формування таких нелінійних робочих середовищ, як розплави полімерів, сипучі та пластичні маси у виробі з урахуванням процесів тверднення і впливу залишкових напружень на властивості кінцевих виробів.

### Постановка задачі

Представимо основні співвідношення МСС у вигляді системи диференціальних рівнянь в ейлеревих координатах для стаціонарних процесів:

-рівняння руху:

$$\nabla \cdot \hat{\sigma} + \vec{f} = \rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}, \quad (1)$$

-рівняння збереження енергії:

$$c_T \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \vec{\nabla} \cdot (\lambda_T \vec{\nabla} T) + \hat{\sigma} : \hat{\zeta} + Q_{(V)}, \quad (2)$$

де для внутрішньої енергії враховано співвідношення:

$$\frac{d}{dt} \rho E = c_T \frac{dT}{dt} = c_T \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T \right), \quad (3)$$

-рівняння збереження маси:

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (4)$$

де  $\rho$  – маса одиниці об'єму (густина) матеріалу;  $\vec{v}$  – вектор швидкості точки тіла;  $\vec{f}$  – вектор зовнішньої сили, що діє на одиницю об'єму тіла;  $\hat{\sigma}$  – тензор напружень;  $\vec{\nabla} \vec{v}$  – градієнт вектора швидкості;  $Q_{(V)}$  – віднесена до одиниці маси швидкість зовнішнього об'ємного притоку тепла разом з іншою немеханічною енергією;  $E$  – питома внутрішня енергія (внутрішня енергія одиниці маси тіла).

До системи рівнянь (1) – (4) необхідно також додати геометричні рівняння Коші:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( \bar{\nabla} \bar{u} + (\bar{\nabla} \bar{u})^T \right), \quad \hat{\zeta} = \frac{1}{2} \left( \bar{\nabla} \bar{v} + (\bar{\nabla} \bar{v})^T \right), \quad (5)$$

які зв'язують тензор деформацій  $\hat{\varepsilon}$  з вектором переміщень  $\bar{u}$  та тензор швидкостей деформацій  $\hat{\zeta}$  з вектором швидкостей  $\bar{v}$ . Для замикання системи рівнянь (1) – (5) до неї треба приєднати рівняння стану,

$$\hat{\phi}(\hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}, \hat{\zeta}, T) = 0, \quad (6)$$

які дозволяють описати основні властивості матеріалів реальних тіл.

При формулюванні рівнянь стану (6) середовища приймаються такі загальні допущення:

- режим руху середовища – стаціонарний, достатньо повільний, щоб силами інерції можна було б знехтувати;
- матеріали мають нелінійні в'язкопружнопластичні властивості, що залежать від напружено-деформованого стану і температури ;
- між твердими тілами і рідинами (газами) виконуються умови прилипання – швидкості на стінках дорівнюють швидкостям стінок (положення поверхонь контакту визначається з врахуванням переміщень твердих тіл).
- в процесі переробки і деформування матеріали можуть змінювати властивості стисливості – від стисливих до нестисливих і навпаки.

Будемо вважати, що повні деформації  $\hat{\varepsilon}$  та їх швидкості  $\hat{\xi}$  можна представити сумами:

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^e + \hat{\varepsilon}^p + \hat{\varepsilon}^T, \quad \hat{\zeta} = \hat{\zeta}^e + \hat{\zeta}^p + \hat{\zeta}^T,$$

де  $\hat{\varepsilon}^e, \hat{\xi}^e$  – пружні деформації та їх швидкості, для яких має місце узагальнений закон Гука:

$$\hat{\sigma} = \hat{E} \cdot \hat{\varepsilon}^e, \quad \hat{\varepsilon}^e = \hat{\Lambda} \cdot \hat{\sigma}, \quad \hat{\zeta}^e = \hat{\Lambda} \cdot \frac{d\hat{\sigma}}{dt},$$

$\hat{E}, \hat{\Lambda}$  – тензори 4-го рангу пружності, які в загальному випадку можуть залежати від температури;  $\hat{\varepsilon}^p, \hat{\xi}^p$  – пластичні деформації та їх швидкості, обумовлені в'язкопластичністю матеріалів:

$$\hat{\sigma} = \hat{M} \cdot \hat{\zeta}^p - p \hat{g}, \quad \hat{\zeta}^p = \hat{B} \cdot \hat{\sigma},$$

$\hat{M}, \hat{B}, p, \hat{g}$  – тензори 4-го рангу в'язко-пластичності, який залежать від температури і від  $\hat{\varepsilon}^p, \hat{\zeta}^p$ , гідростатичний тиск та метричний тензор;  $\hat{\varepsilon}^T, \hat{\zeta}^T$  – теплові деформації і їх швидкості:

$$\hat{\varepsilon}^T = \beta^T \hat{g} (T - T_0), \quad \hat{\zeta}^T = \beta^T \hat{g} \frac{dT}{dt},$$

$\beta^T$ ,  $T_0$ ,  $T$  – коефіцієнт лінійного теплового розширення, початкова і кінцева температури.

З урахуванням прийнятих допущень рівняння стану можна записати через повні деформації або їх швидкості

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &= \hat{E} \cdot (\hat{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}^p) - \hat{\sigma}^T \\ \hat{\sigma} + \hat{\Gamma} \cdot \frac{d\hat{\sigma}}{dt} &= \hat{B} \cdot \hat{\zeta} - p \hat{g} - \hat{\sigma}_V^T, \\ \hat{\sigma}^T &= \hat{A}(T - T_0), \hat{\sigma}_V^T = \hat{h}^T \frac{dT}{dt},\end{aligned}$$

де  $\hat{\Gamma} = \hat{B} \cdot \hat{\Lambda}$  – тензор в'язко-пружності,  $\hat{h}^T = \beta^T \hat{B} \cdot \hat{g}$  – тензор об'ємної термов'язкості,  $\hat{A} = \beta^T \hat{E} \cdot \hat{g}$  – тензор термопружності,  $\sigma^T$ ,  $\sigma_V^T$  – тензори теплових напружень.

### **Особливості чисельного моделювання пружнов'язкопластичних середовищ з урахуванням стисливості і термосилових навантажень**

Попередні дослідження [4, 6] показали, що при комп'ютерному моделюванні напружено-деформованого стану тонкостінних тіл або слабостисливих середовищ традиційні варіанти МСЕ приводять до значних похибок, які виникають завдяки некоректній апроксимації об'ємних деформацій та деформацій зсуву. Це явище спостерігається, наприклад, при розрахунках плоскошкілних головок, де діють високі перепади тиску і прогнозується неадекватне стиснення розплаву. Тому для дискретизації вище наведених рівнянь використана моментна схема МСЕ, яка дозволяє звільнитись від негативних властивостей традиційних елементів шляхом поєднання варіаційного методу з методом моментів [5]. На численних прикладах встановлено, що при послідовному зменшенні стисливості результати розрахунків прямують до розв'язків, які відповідають нестисливим матеріалам. Методика виправдала себе при незмінних властивостях об'ємного деформування тіл. Але у випадках, коли характеристики стисливості матеріалу є змінними величинами і наближенні до умов нестисливості, то виникає нестабільність обчислень ( $\mu/\lambda < 10^{-6}$ ), яка може викривити результати і вимагає контролю за процесами розв'язання систем рівнянь, що суттєво ускладнює автоматизацію розрахунків.

В даній роботі пропонується узагальнення підходу [7] для побудови єдиних співвідношень МСЕ в змішаному варіанті незалежно від стисливості матеріалів при збереженні переваг моментної схеми МСЕ.

При чисельному моделюванні задач механіки суцільних середовищ необхідно розв'язувати системи нелінійних рівнянь високого порядку, для яких не існує прямих методів. Тому використовуються ітераційні методи на базі лінеаризованих рівнянь. Для процесів, що розглядаються в даній роботі, лінеаризація повинна виконуватись для фізичних рівнянь (рівнянь стану). Як показали чисельні дослідження МСЕ, це можна зробити на рівні визначення дискретних співвідношень для скінчених елементів,

взявши за основу матриці жорсткості та в'язкості, які у комбінації дозволяють моделювати властивості широкого класу матеріалів.

Для побудови лінеаризованих рівнянь  $MCE$  в переміщеннях або швидкостях переміщень звичайно застосовується метод Ритця, який забезпечує симетрію матриць (якщо це можливо) системи рівнянь завдяки застосуванню варіаційних принципів. Так, при отриманні матриці жорсткості для пружного тіла можна використати вираз для роботи внутрішніх сил  $CE$  на можливих переміщеннях:

$$\delta W_{CE} = \frac{1}{2} \delta \int_{V_{CE}} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_{V_{CE}} \delta \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV, \quad (7)$$

де  $V_{ce}$  – область навколо початку координат,  $\{\sigma\} = [\sigma^{11} \quad \sigma^{22} \quad \sigma^{33} \quad \sigma^{12} \quad \sigma^{13} \quad \sigma^{23}]^T$  – вектор напружень, який визначається через матрицю  $[E]$  параметрів пружності матеріалів і вектор деформацій  $\{\varepsilon\} = [\varepsilon^{11} \quad \varepsilon^{22} \quad \varepsilon^{33} \quad 2\varepsilon^{12} \quad 2\varepsilon^{13} \quad 2\varepsilon^{23}]^T$ :

$$\{\sigma\} = [E] \{\varepsilon\} \quad (8)$$

$C^{ijkl} = \mu^e (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \lambda^e g^{ij} g^{kl}$  – компоненти тензора пружності ізотропних пружних матеріалів,  $\mu^e = \frac{0,5E}{1+\nu}$ ,  $\lambda^e = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  – коефіцієнти пружності, що

залежать від температури і деформацій,  $g^{ij}$  – компоненти метричного тензора координатної системи. Беручи до уваги співвідношення [7], що дозволяють представити залежність деформацій від вузлових переміщень

$$\{\varepsilon\} = [B] \{U\}, \quad (9)$$

можна привести (7) до остаточного варіанту:

$$\delta W_{CE} = \int_{V_{CE}} \delta \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} dV = \delta \{U\}^T [B]^T [E] [B] \{U\} = \delta \{U\}^T [K^e] \{U\},$$

де  $[K^e] = [B]^T [E] [B]$  – матриця жорсткості  $CE$ ,  $\delta \{U\}$  – вектор можливих вузлових переміщень.

При розгляді в'язкотекучих матеріалів визначається матриця в'язкості  $CE$ . Для цього використовується потужність роботи внутрішніх сил:

$$\delta \dot{W}_{CE} = \frac{1}{2} \delta \int_{V_{CE}} \{\dot{\varsigma}\}^T \{\sigma\} dV = \int_{V_{CE}} \delta \{\dot{\varsigma}\}^T \{\sigma\} dV, \quad (10)$$

де  $\{\sigma\}$  – вектор напружень, зв'язаний з  $\{\varsigma\} = [\varsigma^{11} \quad \varsigma^{22} \quad \varsigma^{33} \quad 2\varsigma^{12} \quad 2\varsigma^{13} \quad 2\varsigma^{23}]^T$  – вектором швидкостей деформацій матричним співвідношенням  $\{\sigma\} = [M] \{\varsigma\}$ ,  $[M]$  – матриця в'язкості, яка формується з компонент тензора в'язкості  $C_V^{ijkl}$  аналогічно (8),

$C_V^{ijkl} = \mu^V (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \lambda^V g^{ij} g^{kl}$ ,  $\mu^V, \lambda^V$  – коефіцієнти в'язкості першого та другого роду, що є функціями температури та швидкостей деформацій.

У випадку формування системи рівнянь МСЕ змішаного типу, коли невідомими крім переміщень є напруження, використовуються узагальнені варіаційні принципи, які можна сформулювати з допомогою множників Лагранжа. Так, при розгляді слабо стисливих ізотропних тіл до складу невідомих доцільно приєднати середнє напруження  $\sigma_s$ . Для цього рівняння стану для пружного тіла необхідно представити у вигляді:

$$\{\sigma\} = \{s\} + \sigma_s \{g\} = [\tilde{E}]\{\varepsilon\} + \sigma_s \{g\},$$

де  $\{s\}$  – вектор девіатора напружень,  $\{g\} = [g^{11} \ g^{22} \ g^{33} \ g^{12} \ g^{13} \ g^{23}]^T$  – вектор, елементами якого є контраваріантні компоненти метричного тензора, а матриця пружності  $[\tilde{E}]$  відрізняється від  $[E]$  тим, що при обчисленні  $C^{ijkl}$  замість  $\lambda^e$  підставляється коефіцієнт  $\tilde{\lambda}^e$  ( $\tilde{\lambda}^e = -2\mu^e/3$ ) для виділення девіатора напружень. Об'ємна деформація ізотропного матеріалу залежить тільки від середнього напруження:

$$\theta - \frac{\sigma_s}{k^e} = \theta - \eta^e \sigma_s = 0$$

де  $\eta^e = \frac{1}{k^e} = \frac{3(1-2\nu^e)}{E^e}$  – коефіцієнт об'ємної стисливості, який прямує до нуля ( $\nu^e \rightarrow 0,5$ ;  $\eta^e \rightarrow 0$ ;  $k^e \rightarrow \infty$ ), коли матеріал стає нестисливим,  $E^e$  – модуль Юнга,  $\nu^e$  – коефіцієнт Пуассона.

При розгляді полілінійного СЕ з позицій моментної схеми МСЕ об'ємна деформація  $\theta$  та середні напруження  $\sigma_s$  в межах СЕ вважаються сталою величиною, що дозволяє переписати (10) у вигляді:

$$\begin{aligned} \delta \tilde{W}_{CE} &= \int_{V_{CE}} \delta \{\varepsilon\}^T [\tilde{E}]\{\varepsilon\} dV + \sigma_s \delta \Theta_{CE} + (\Theta_{CE} - \eta^e \sigma_s V_{CE}) \delta \sigma_s = \\ &= \delta \{U\}^T [\tilde{K}^e] \{U\} + \delta \{U\}^T \{N\} \sigma_s + \delta \sigma_s \{N\}^T \{U\} - \delta \sigma_s \eta^e \sigma_s V_{CE} = \delta \{\Phi\}^T [\tilde{H}^e] \{\Phi\}, \end{aligned}$$

де  $\Theta_{CE}$  – зміна об'єму СЕ,  $[\tilde{H}^e]$  – змішана матриця для пружного СЕ, яка дорівнює:

$$[\tilde{H}^e] = \begin{bmatrix} [\tilde{K}^e] & \{N\} \\ \{N\}^T & -(\eta^e V_{CE}) \end{bmatrix},$$

$[\tilde{K}^e]$  – матриця жорсткості СЕ відносно зміни його форми,  $\{N\}$  – вектор впливу вузлових переміщень на об'ємну деформацію СЕ,  $\{\Phi\} = \begin{Bmatrix} \{U\} \\ \sigma_s \end{Bmatrix}$  – змішаний вектор невідомих СЕ, який складається з вектора вузлових переміщень та величини середнього напруження, яке вважається віднесеним до центра СЕ.

Аналогічним способом знаходиться матриця змішаного типу для в'язкого стисливого СЕ, коли за невідомі величини приймається вектор вузлових швидкостей  $\{v\}$  разом з

середнім напруженням  $\sigma_s$ . Для врахування стисливості скористаємось рівнянням збереження маси (4) у вигляді:

$$0 \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \frac{1}{\rho} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \frac{1}{\rho} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} - \eta^e \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \sigma_s = 0, \quad (11)$$

де вважається, що зміна початкової густини  $\rho_0$  матеріалу залежить від напруження  $\sigma_s$ :  $\rho = \rho_0 (1 - \eta^e \sigma_s)$ . З допомогою множника Лагранжа  $\delta \sigma_s$  та рівняння (11) враховується стисливість для в'язкого середовища в змішаній матриці  $[\tilde{H}^V]$  для в'язкого СЕ:

$$[\tilde{H}^V] = \begin{bmatrix} [\tilde{K}^V] & \{N\} \\ \{N\}^T & -(\eta^V V_{CE}) \end{bmatrix}, \quad (12)$$

де  $[\tilde{K}^V]$  – матриця в'язкості СЕ,  $\{N\}$  – вектор впливу вузлових швидкостей на швидкість об'ємної деформації СЕ,  $\{\Psi\} = \begin{Bmatrix} \{V\} \\ \sigma_s \end{Bmatrix}$  – змішаний вектор невідомих для в'язкого стисливого СЕ, який складається з вектора вузлових швидкостей та величини середнього напруження.

Коефіцієнт стисливості  $\eta^V$  в (12) є змінною величиною  $\eta^V = \frac{\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \sigma_s}{\sigma_s}$ , яка на початку при

$\sigma_s = 0$  приймається  $\eta^V = 0$ . Градієнт  $\vec{\nabla} \sigma_s$  обчислюється через вузлові значення  $\sigma_s$ , які дорівнюють середньо арифметичним значенням тих напружень СЕ, що входять в «зірку» скінчених елементів відповідного вузла.

Важливим застосуванням матриць СЕ змішаного методу є дослідження слабо стисливих та нестисливих середовищ незалежно від їх стану і особливо тоді, коли в процесі переробки матеріалів або будь-якої взаємодії тіл різної природи властивості їх змінюються в широкому діапазоні, включаючи перехід від стисливого до повністю нестисливого стану і навпаки. Це характерно для процесів екструзії та лиття полімерів, пресування пористих матеріалів, тощо.

### Аналіз результатів чисельних досліджень

Дослідження взаємного впливу пружної деформації конструктивних елементів формуючого устаткування та параметрів течії полімерного матеріалу в його формуючих каналах проводилося на модельній конструкції плоскощільної головки.

Схема нанесення сіткової області на конструктивні елементи та формуючі канали головки, що моделюється, представлена на рис. 1.

Оскільки конструкція симетрична подвох осях, розрахунки проводилися по чверті формуючої порожнини та конструктивних елементів головки.

На рис. 2 показано відмінність між розподілами швидкостей руху поліетилену високої густини на виході з формуючої щільної плоскощільної головки без урахування і з урахуванням пружної деформації її корпусу.

З отриманих результатів чисельних досліджень (рис. 2) витікає, що за наявності пружної деформації конструктивних елементів корпусу картина течії розплаву в формуючих каналах якісно змінилася і різниця швидкостей в центральній зоні і на краях формуючої щілини навіть стала зворотною. Моделювання течії розплаву на виході з головки, в якій формуючі канали зпрофільовані без урахування пружної деформації конструктивних елементів, показує майже рівномірний розподіл швидкостей по ширині з невеликим збільшенням по краях. В той же час, моделювання процесу формування з урахуванням деформації корпусу головки показує, що висота щілини в центральній зоні збільшується, а внаслідок цього витрата розплаву в цій зоні перевищує витрати по краях формуючої щілини.

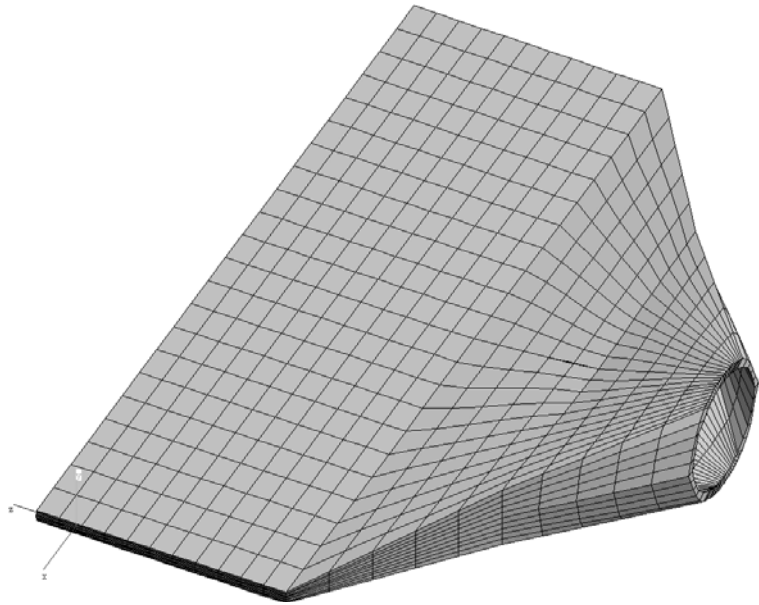


Рис. 1. Сіткова область модельної головки.

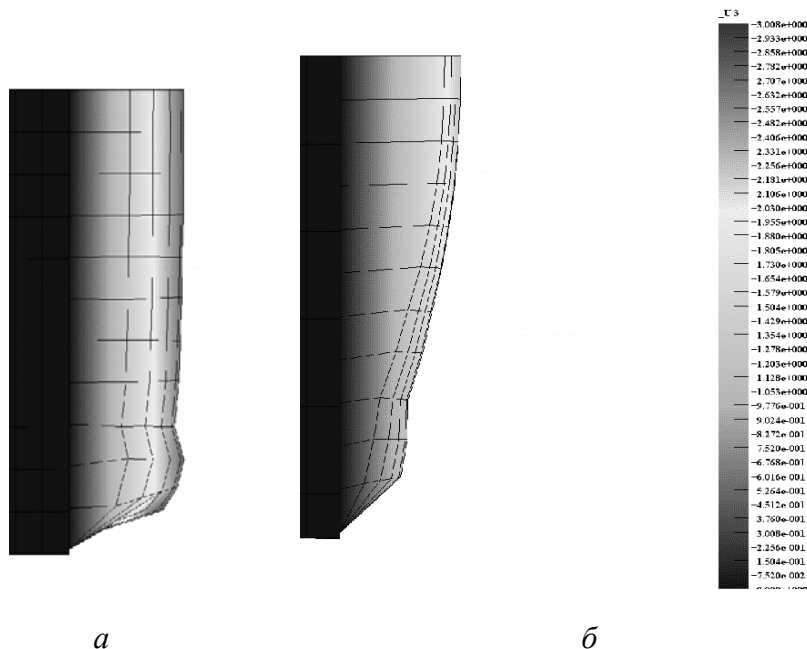


Рис. 2. Розподіл швидкостей розплаву на виході з головки:

*a* - без урахування деформації корпусу; *б*- з урахуванням деформації корпусу

Для дослідження впливу жорсткості конструктивних елементів корпусу головки проведено чисельне моделювання залежності розподілу швидкостей руху розплаву



полімеру на виході з формуючого каналу від циліндричної жорсткості головки, яку визначали за формулою:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

де  $E$  та  $\nu$  – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона матеріалу корпусу відповідно,  $h$  – товщина стінки корпусу.

Графік співвідношення швидкостей розплаву по центру та на краях формуючої щілини головки залежно від величини циліндричної жорсткості стінки корпусу представлений на рис. 3.

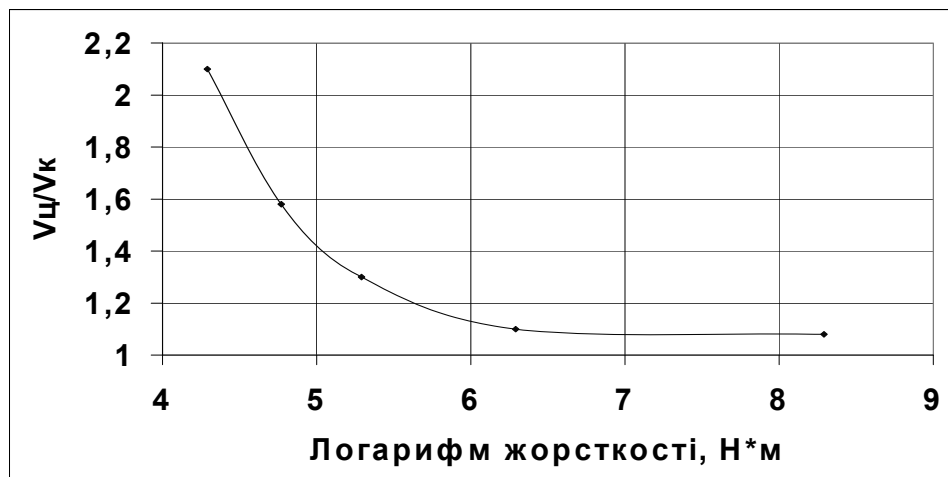


Рис. 3. Залежність співвідношення швидкостей розплаву на виході з головки від циліндричної жорсткості стінки корпусу

Залежність величини найбільшого прогину стінки корпусу від її циліндричної жорсткості представлена на рис. 4.

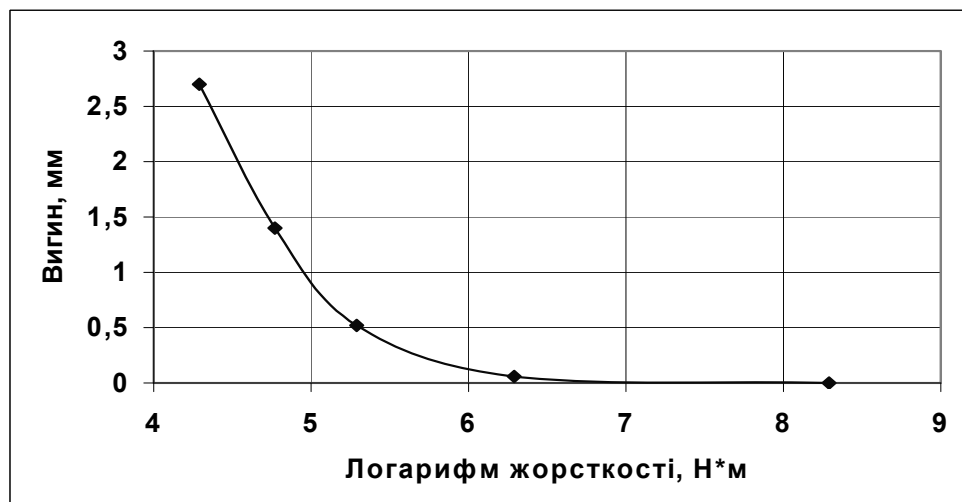


Рис. 4. Залежність найбільшого прогину стінки корпусу від її циліндричної жорсткості

Залежності на рис. 3 і 4 мають нелінійний характер, оскільки із збільшенням деформації стінок корпусу головки відбуваються локальні зміни в'язкості, швидкості,

тиску і т.д. Після досягнення значення жорсткості понад  $6 \text{ Н}^*\text{м}$  величина прогину формуючих конструктивних елементів плоскощільної головки незначна і майже не впливає на розподіл швидкостей полімеру в каналах.

В якості іншого прикладу взаємовпливу пружності конструктивних елементів

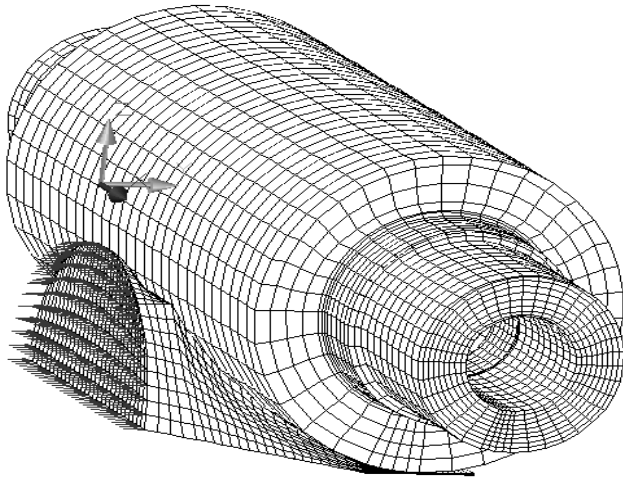


Рис. 5. Скінченноелементна розрахункова схема формуючої головки ЧВА

формуючого устаткування та параметрів течії перероблюваних матеріалів в його каналах розглядався процес формування листа з гумової суміші в черв'ячно-валковому агрегаті (ЧВА). Просторова модель течії гумової суміші 2Р-581 безпосередньо у формуючій зоні черв'ячно-валкового агрегата являє собою геометрично складний перехід від циліндричного каналу черв'ячної машини до міжвалкового зазору формуючої головки з валками, що обертаються. На рис. 5 показано скінченноелементну розрахункову

схему верхньої половини формуючої головки, симетричної відносно горизонтальної площини, що проходить крізь середину міжвалкового зазору. Діаметр валків – 500 мм, ширина формуючої зони – 600 мм, швидкість обертання валків – 40 м/хв, величина зазору між валками – 4 мм.

В ході чисельного моделювання досліджувались просторові поля розподілу тиску в формуючій зоні, швидкостей течії перероблюваного матеріалу з урахуванням зміни його реологічних властивостей для різних технологічних режимів у взаємозалежності з прогином валків. Конфігурація перехідної формуючої зони ЧВА відрізняється від інших валкових машин, тому якісна картина процесу формування та прогину валків в ньому відрізняється від таких для каландрування й вальцювання, що говорить про обґрунтованість застосування для подібних об'єктів лише тривимірних моделей. Наведений приклад відображає можливість розробленої математичної моделі здійснення зв'язаного рішення пружної, теплової та нелінійно-в'язкої задач.

В якості прикладу на рис. 6 представлені графіки, які дозволяють прослідити розподіл швидкостей течії матеріалу по висоті зазору у трьох перетинах: в зоні входу матеріалу в валковий зазор, де помітна область виникнення протитоку поблизу осі зазору; потім в середньому перетині по довжині дуги контакту матеріалу з бочкою валка, де швидкості розподіляються в напрямку обертів валків; і в перетині по мінімальній висоті міжвалкового зазору. Приклад наведено для температури валків та гумової суміші  $80^{\circ}\text{C}$ , продуктивності агрегату 70 кг/год.

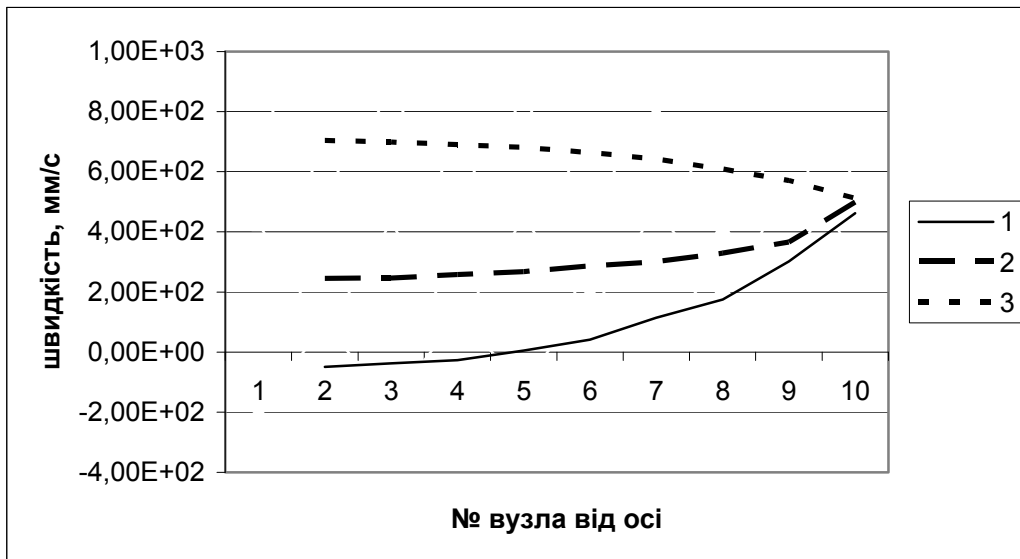


Рис.6. Розподіл швидкостей матеріалу по висоті міжвалкового зазору: 1-зона входу матеріалу; 2-середній перетин; 3-при мінімальній висоті зазору

Досліджені поля швидкостей та взаємопов'язані з ними поля в'язкостей та тиску в зоні формування дозволили визначити характеристики прогину робочої частини валків для різних технологічних режимів формування листових гумових виробів (рис. 7)

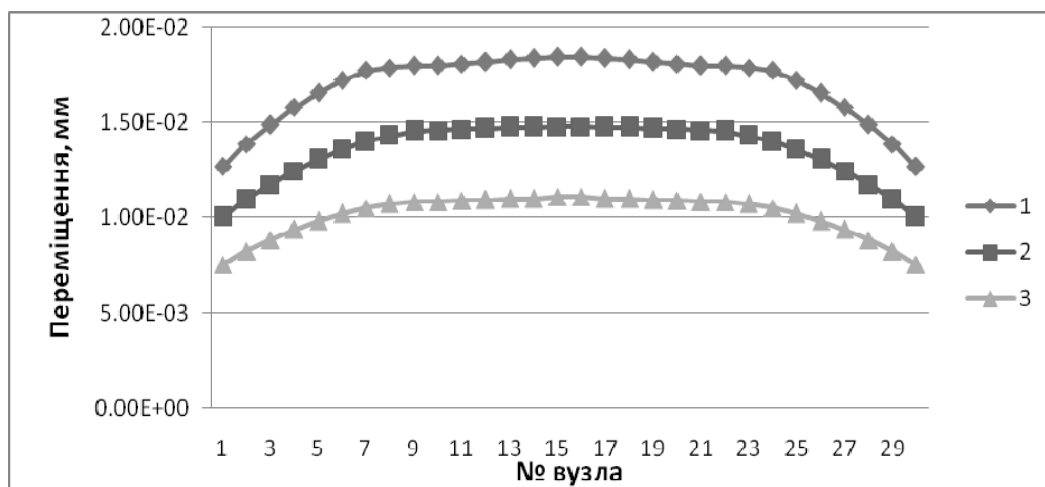


Рис. 7. Прогин робочої частини валка при температурах гумової суміші в формуючій зоні: 1- 40°C; 2- 60°C; 80°C

Величина прогину валків зростає зі зменшенням температури формування і для даних умов не перевищує 0,02 мм. Отримані результати підтверджують важливість врахування та необхідність компенсації прогину валків при формуванні плівкових та каліброваних листових виробів.

### Висновки

Розроблено узагальнену математичну модель дослідження течії нелінійно в'язких рідин з урахуванням пружної деформації конструктивних елементів каналів

технологічного обладнання. Це дозволяє в рамках системи автоматизованого проектування машин та апаратів хімічних виробництв на сучасному рівні розробляти нові технологічні процеси переробки матеріалів з врахуванням їх взаємодії з елементами обладнання.

На базі розроблених алгоритмів та методики чисельних розрахунків проведено взаємопов'язані чисельні дослідження параметрів течії полімерних матеріалів у формуючих каналах полімерного устаткування з рухомими та нерухомими деформівними стінками та напружено-деформованого стану елементів обладнання.

Розроблені математична модель та методика можуть застосовуватись для практичного використання в ході проектування технологічного устаткування і оптимізації його конструктивно-технологічних параметрів.

Напрямами подальших досліджень може бути чисельне моделювання таких процесів та обладнання переробки й формування полімерних матеріалів та виробів, як екструзійне формування погонажних виробів, лиття під тиском, вальцювання та каландрування з урахуванням фазових переходів, залишкових напружень та пружної деформації конструктивних елементів переробного обладнання.

### Список літератури

1. Сівецький В.І., Сокольський О.Л., Сідоров Д.Е., Ткаченко С.М. Моделювання параметрів течії неньютонівських рідин в формуючих каналах екструзійного обладнання // Матеріали 23 щорічної міжнародної конференції та виставки «Композиційні матеріали в промисловості» (2 – 6 червня 2003 р.). – Ялта, 2003. – с. 99 – 101.
2. Zhao J., Mascia L., Nassehi V Simulation of the rheological behavior of polymer blends by finite element analysis. // Adv. Polym. Technol. – 1997. – 16, №3. – р. 206-226.
3. Седов Л.И. Механика сплошной среды.// – Москва :Наука, т.1 (т.2) – 1970, 492 (568)с.
4. Киричевский В.В., Сахаров А.С. Нелинейные задачи термомеханики конструкций из слабосжимаемых эластомеров. – К.: Будівельник, 1992. – 216 с.
5. Метод конечных элементов в механике твердых тел. / Под общ. ред. А.С.Сахарова и И.Альтенбаха – К.: Вища школа, 1982. – 480 с.
6. Сахаров О.С., Баженов В.А., Цыхановский В.К. Моментная схема метода конечных элементов в задачах нелинейной механики сплошной среды // Прикладная механика – 2002. - т.38, №6, с. 24-63.
7. Сахаров О.С., Сівецький В.І., Сокольський О.Л., Щербина В.Ю. „Розробка скінченноелементної математичної моделі руху неньютонівських слабостисливих та нестисливих рідин” // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2004. – №2. – с. 56 - 65.
8. Щербина В.Ю., Гондляр О.В., Сівецький В.І., Сахаров О.С. САПР. Інтегрована система моделювання технологічних процесів і розрахунку обладнання хімічної промисловості // Навчальний посібник – К.: НТУУ «КПІ» 2006р. – 156с.