

НАПРУЖЕНИЙ СТАН БАГАТОЗВ'ЯЗНОЇ ПЛАСТИНКИ З КРУГОВИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ТА КРИВОЛІНІЙНИМИ ТРІЩИНАМИ

У роботі розглянуто загальний випадок пластинок з круговим пружним включенням, послаблених отворами і криволінійними тріщинами. Для розв'язування задачі використано сумісно метод інтегральних рівнянь та розв'язки типу Гріна.

The general case of plates with the circular resilient including, weakened openings and curvilinear cracks is considered in this work. For untiing a task the method of integral equalizations and upshot is used compatible as Grina.

Розглядається задача про визначення НДС біля отворів і криволінійних тріщин у кусково-однорідній пластинці з круговою межею розділу. Огляд виконаних у цьому напрямку робіт наведено в [1, 2, 3]. Однак виконані в літературі дослідження в основному стосувались нескінченних пластинок з прямолінійними тріщинами. Метою даної роботи є розробка алгоритму розрахунку напруженого стану біля криволінійних тріщин багатозв'язної пластинки з круговим включенням та дослідження коефіцієнтів інтенсивності напружень залежно від форми тріщин, їх розміщення та механічних характеристик.

Приймається, що тріщини розміщені вздовж кривих L_j ($j=1, \dots, l$), границями отворів є замкнені гладкі криві H_1, H_2, \dots, H_M , пластинка навантажена на нескінченності, зосередженими силами та зусиллями q_H , що прикладені до границі отворів та зусиллями q_T , які діють на тріщинах і є однаковими на протилежних берегах. Тут пластинка віднесена до декартової системи координат Oxy , в якій кругове включення займає область $|z| < R$, де $z = x + iy$. Надалі пружні сталі та розв'язки для включення (області $|z| < R$) і матриці (області $|z| > R$) будемо позначати з індексами 1 і 2 відповідно.

Алгоритм розрахунку напруженого стану біля тріщини. Для розв'язування задачі використаємо алгоритм, який ґрунтується на методі інтегральних рівнянь з додатковим застосуванням розв'язків типу Гріна [4]. За такі розв'язки вибрано комплексні потенціали Мусхелішвілі $\Phi_S(z), \Psi_S(z)$ для суцільної кусково-однорідної пластинки, коли ці потенціали мають особливості

$$\Phi_S(z) \sim \frac{A}{z_0 - z}, \quad \Psi_S(z) \sim \frac{\bar{A}}{z_0 - z} - \frac{\overline{z_0 A}}{(z_0 - z)^2}, \quad (1)$$

де A, z_0 – довільні комплексні сталі.

Допоміжна задача. Наведемо розв'язок більш загальної задачі, який ефективний

також при розгляді силових задач теорії пружності. Введемо далі в розгляд комплексні функції $\varphi_j(z)$, $\omega_j(z) = \psi_j(z) + R^2 \varphi_j'(z)/z$, $j=1,2$.

Приймемо, що напружений стан суцільної однорідної нескінченної пластинки, що зумовлений прикладеним до включення навантаженням при $R \rightarrow \infty$ описується комплексними потенціалами $\varphi_1^0(z)$, $\omega_1^0(z)$. Аналогічні потенціали, що відповідають матриці при $R \rightarrow 0$ позначимо через $\varphi_2^0(z)$, $\omega_2^0(z)$.

Тоді задовольняючи умовам ідеального механічного контакту при $|z|=R$ [1], отримуємо, що потенціали для кусково-однорідної пластинки знаходяться за формулами

$$\begin{aligned}\varphi_1(z) &= \varphi_1^0(z) + \alpha_{11}\varphi_2^0(z) + \beta_{21}\omega_1^*(z) + D_1z, \\ \omega_1(z) &= \omega_1^0(z) + \alpha_{12}\omega_2^0(z) + \beta_{22}\varphi_1^*(z) + C_1/z, \\ \varphi_2(z) &= \varphi_2^0(z) + \alpha_{22}\varphi_1^0(z) + \beta_{12}\omega_2^*(z) + D_2z, \\ \omega_2(z) &= \omega_2^0(z) + \alpha_{21}\omega_1^0(z) + \beta_{11}\varphi_2^*(z) + C_2/z,\end{aligned}\tag{2}$$

де $\alpha_{ij} = a_i/b_j$, $a_1 = G_1(1 + \chi_2)$, $a_2 = G_2(1 + \chi_1)$, $b_1 = G_1 + \chi_1 G_2$, $b_2 = G_2 + \chi_2 G_1$,

$\beta_{ij} = \alpha_{ij} - 1$, G_j – модулі зсуву, $\chi_j = (3 - \nu_j)/(1 + \nu_j)$, ν_j – коефіцієнти Пуассона. Тут позначено $D_1 = -\beta_{21}\overline{\alpha_0}$, $D_2 = -\beta_{12}\overline{\beta_0}$, $C_1 = -R^2(\alpha_0 + \alpha_{12}\beta_0)$, $C_2 = -R^2(\alpha_{21}\alpha_0 + \beta_0)$,
 $\beta_0 = \varphi_2^{0'}(0)$, $\omega_1^*(z) = \overline{\omega_1^0(R^2/z)} + \frac{\chi_1}{1 + \chi_1} P_1 \ln(z)$, $\omega_2^*(z) = \overline{\omega_2^0(R^2/z)} - \frac{\chi_2}{1 + \chi_2} P_1 \ln(z)$,

$$\varphi_1^*(z) = \overline{\varphi_1^0(R^2/z)} - \frac{1}{1 + \chi_1} \overline{P_1} \ln(z), \quad \varphi_2^*(z) = \overline{\varphi_2^0(R^2/z)} + \frac{1}{1 + \chi_2} \overline{P_1} \ln(z)$$

$P_1 = (X + iY)/2\pi$, $X + iY$ – головний вектор всіх сил, що прикладені до включення.

Стала α_0 визначається із умови $\alpha_0 = \varphi_1^{0'}(0) - \varphi_1'(0)$.

Напруження визначаються через потенціали за формулами

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} \Phi_j(z), \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = F_j,$$

де $F_j = 2 \left[\overline{z} \Phi_j'(z) + \Psi_j(z) \right]$.

Враховуючи, що $\Psi_j(z) = \Omega_j(z) - R^2 \Phi_j'(z)/z + R^2 \Phi_j(z)/z^2$,

маємо $F_j = \Omega_j(z) + (\overline{z} - R^2/z) \Phi_j'(z) + R^2 \Phi_j(z)/z^2$,

де $\Omega_j(z) = \omega_j'(z)$.

Випишемо вирази для цих потенціалів, через які визначається напруження

$$\Phi_1(z) = \Phi_1^0(z) + \alpha_{11}\Phi_2^0(z) + \beta_{21}\Omega_1^*(z) + D_1,$$

$$\Omega_1(z) = \Omega_1^0(z) + \alpha_{12}\Omega_2^0(z) + \beta_{22}\Phi_1^*(z) - C_1/z^2,$$

$$\Phi_2(z) = \Phi_2^0(z) + \alpha_{22}\Phi_1^0(z) + \beta_{12}\Omega_2^*(z) + D_2,$$

$$\Omega_2(z) = \Omega_2^0(z) + \alpha_{21}\Omega_1^0(z) + \beta_{11}\Phi_2^*(z) - C_2/z^2,$$

$$\text{де } \Omega_1^*(z) = -\overline{\Omega_1^0}(R^2/z) \frac{R^2}{z^2} + \frac{\chi_1}{1+\chi_1} \frac{P_1}{z}, \quad \Omega_2^*(z) = -\overline{\Omega_2^0}(R^2/z) \frac{R^2}{z^2} - \frac{\chi_2}{1+\chi_2} \frac{P_1}{z},$$

$$\Phi_1^*(z) = -\overline{\Phi_1^0}(R^2/z) \frac{R^2}{z^2} - \frac{1}{1+\chi_1} \frac{\overline{P_1}}{z}, \quad \Phi_2^*(z) = -\overline{\Phi_2^0}(R^2/z) \frac{R^2}{z^2} + \frac{1}{1+\chi_2} \frac{\overline{P_1}}{z},$$

$$\Phi_1'(z) = \Phi_1^{0'}(z) + \alpha_{11}\Phi_2^{0'}(z) + \beta_{21}\Omega_1^{*'}(z),$$

$$\Omega_1'(z) = \Omega_1^{0'}(z) + \alpha_{12}\Omega_2^{0'}(z) + \beta_{22}\Phi_1^{*'}(z) + 2C_1/z^3,$$

$$\Phi_2'(z) = \Phi_2^{0'}(z) + \alpha_{22}\Phi_1^{0'}(z) + \beta_{12}\Omega_2^{*'}(z),$$

$$\Omega_2'(z) = \Omega_2^{0'}(z) + \alpha_{21}\Omega_1^{0'}(z) + \beta_{11}\Phi_2^{*'}(z) + C_2/z^3.$$

Із умови для знаходження сталої α_0 отримуємо рівняння $\beta_{21}\overline{\alpha_0} - \alpha_0 = S$, де $S = \alpha_{11}\Phi_2^0(0) + \beta_{21}\Omega_1^*(0)$. Звідси маємо $\alpha_0 = (\beta_{21}\overline{S} + S) / (\beta_{21}^2 - 1)$.

Фундаментальний розв'язок. Використаємо співвідношення (2) для знаходження введеного фундаментального розв'язку (1). Для цього розглянемо окремо випадки, коли точка z_0 лежить у включенні або матриці.

У випадку, коли комплексні коли $|z_0| < R$, маємо

$$\varphi_1^0(z) = -A \ln(z - z_0), \quad \omega_1^0(z) = -\overline{A} \ln(z - z_0) + A \left(\frac{\overline{z_0} - z_0^*}{z - z_0} + \frac{z_0^*}{z} \right), \quad \varphi_2^0(z) = \omega_2^0(z) = 0,$$

$$\varphi_1^*(z) = -\overline{A} \ln(z - z_0^*), \quad \omega_1^*(z) = -A \ln(z - z_0^*) + \frac{\overline{A}}{z_0} \left(z + \frac{\gamma_0}{z - z_0^*} \right),$$

де $z_0^* = R^2/\overline{z_0}$, $\gamma_0 = z_0^*(z_0^* - z_0)$.

Тоді

$$\varphi_1(z) = \varphi_1^0(z) + \beta_{21}\omega_1^*(z) + D_1z, \quad \omega_1(z) = \omega_1^0(z) + \beta_{22}\varphi_1^*(z) + C_1/z,$$

$$\varphi_2(z) = \alpha_{22}\varphi_1^0(z) + A\beta_{12}a_2/a_1 \ln z + D_2z, \tag{3}$$

$$\omega_2(z) = \alpha_{21}\omega_1^0(z) + \overline{A}\beta_{11}a_2/a_1 \ln z + C_2/z.$$

Похідні від цих функцій, що входять у формули для напружень будуть

$$\Phi_1^0(z) = -\frac{A}{z-z_0}, \quad \Omega_1^0(z) = -\frac{\bar{A}}{z-z_0} - A \left(\frac{\bar{z}_0 - z_0^*}{(z-z_0)^2} + \frac{\bar{z}_0}{z^2} \right),$$

$$\Phi_1^*(z) = -\frac{\bar{A}}{z-z_0^*}, \quad \Omega_1^*(z) = -\frac{A}{z-z_0^*} + \frac{\bar{A}}{z_1} \left(1 - \frac{\gamma_0}{(z-z_0^*)^2} \right),$$

Аналогічно для випадку, коли $|z_0| > R$ маємо

$$\varphi_2^0(z) = -A \ln(z-z_0), \quad \omega_2^0(z) = -\bar{A} \ln(z-z_0) + A \left(\frac{\bar{z}_0 - z_0^*}{z-z_0} + \frac{\bar{z}_0}{z} \right), \quad \varphi_1^0(z) = \omega_1^0(z) = 0,$$

$$\varphi_2^*(z) = -\bar{A} [\ln(z-z_0^*) - \ln z], \quad \omega_1^*(z) = -A [\ln(z-z_0^*) - \ln z] + \frac{\bar{A}}{z_0} \left(z + \frac{\gamma_0}{z-z_0^*} \right). \quad (4)$$

Тоді $\varphi_1(z) = \alpha_{11}\varphi_2^0(z) + D_1z$, $\omega_1(z) = \alpha_{12}\omega_2^0(z) + C_1/z$,

$$\varphi_2(z) = \varphi_2^0(z) + \beta_{12}\varphi_2^*(z) + D_2z, \quad \omega_2(z) = \omega_2^0(z) + \beta_{11}\omega_2^*(z) + C_2/z.$$

Перепишемо знайдені потенціали у вигляді

$$\Phi_S(z, z_0) = A_0 F_0(z, z_0) + \bar{A}_0 F_1(z, z_0), \quad \Psi_S(z, z_0) = A_0 P_0(z, z_0) + \bar{A}_0 P_1(z, z_0), \quad (5)$$

де F_j, P_j – відомі функції. Тоді інтегральні представлення для комплексних потенціалів для кусково-однорідної пластинки з отворами і тріщинами запишуться [1]

$$\Phi(z) = \Phi_c(z) + \int_L [Q(t)F_0(z, t) + \overline{Q(t)}F_1(z, t)] ds + \int_H [Q(t)F_0(z, t) + \overline{Q(t)}F_1(z, t)] ds,$$

$$\Psi(z) = \Psi_c(z) + \int_L [Q(t)P_0(z, t) + \overline{Q(t)}P_1(z, t)] ds + \int_H [Q(t)P_0(z, t) + \overline{Q(t)}P_1(z, t)] ds,, \quad (6)$$

де $\Phi_c(z), \Psi_c(z)$ – комплексні потенціали для суцільної кусково-однорідної пластинки, що відповідають зосередженим силам та прикладеному навантаженню на нескінченності, $L = L_1 + L_2 + \dots + L_L$, $H = H_1 + H_2 + \dots + H_M$. Введена невідома функція на тріщині Q визначається через стрибки вектора переміщень [1, 3]. Для забезпечення умови однозначності переміщень необхідно, щоби $\int_{L_j} Q ds = 0$ на кожній з тріщин та

$\int_{H_j} Q ds = 0$ на отворах. Тут прийнято, що прикладене до отворів навантаження є само-рівноваженим.

Випишемо комплексні потенціали з індексом c , які входять у представлення (6).

а) *Комплексні потенціали при дії зосереджених сил.* Далі будемо розглядати випадок дії зосереджених сил (X_j, Y_j) , що прикладені до включення та матриці в

точках z_j ($j=1, 2$), причому $|z_1| < R$, $|z_2| > R$. Потенціали в цьому випадку мають особливості

$$\Phi_c(z) \sim \Phi_j^0(z), \Psi_c(z) \sim \Psi_j^0(z), \quad (7)$$

$$\text{де } \Phi_j^0(z) = \frac{A_j}{z_j - z}, \Psi_j^0(z) = \frac{\gamma \bar{A}_j}{z_j - z} - \frac{\bar{z}_j A_j}{(z_j - z)^2}, j=1,2, A_j = -\frac{P_j}{1 + \chi_j}, P_j = \frac{X_j + iY_j}{2\pi}, \gamma = -\chi_j.$$

Введені вище особливі функції в даному випадку будуть

$$\varphi_j^0(z) = -\frac{P_j}{1 + \chi_j} \ln(z - z_j), \omega_j^0(z) = \frac{\chi_j \bar{P}_j}{1 + \chi_j} \ln(z - z_j) + \frac{P_j}{1 + \chi_j} \left(\frac{\bar{z}_j - z_j^*}{z - z_j} + \frac{z_j^*}{z} \right), \quad (8)$$

$$\varphi_1^*(z) = -\frac{1}{1 + \chi_1} \bar{P}_1 \ln(z - z_1^*), \varphi_2^*(z) = -\frac{\bar{P}_2}{1 + \chi_2} \ln(z - z_2^*) + \frac{\bar{P}_1 + \bar{P}_2}{1 + \chi_2} \ln(z),$$

$$\omega_1^*(z) = \frac{\chi_1}{1 + \chi_1} \bar{P}_1 \ln(z - z_1^*) + \frac{\bar{P}_1}{(1 + \chi_1)z_1} \left(z + \frac{\gamma_1}{z - z_1^*} \right),$$

$$\omega_2^*(z) = \frac{\chi_2}{1 + \chi_2} \bar{P}_2 \left[\ln(z - z_2^*) - \ln z \right] + \frac{\bar{P}_2}{(1 + \chi_2)z_2} \left(z + \frac{\gamma_2}{z - z_2^*} \right),$$

де $z_j^* = R^2 / \bar{z}_j$, $\gamma_j = z_j^*(z_j^* - z_j)$.

б) *Потенціали, які відповідають випадку розтягу пластинки.* Нехай пластинка перебуває в умовах двостороннього розтягу зусиллями на нескінченності N_1, N_2 , причому кут між напрямом дії перших зусиль і віссю Ox рівний α . Тоді на основі загального розв'язку (2) маємо

$$\varphi_1 = (a_{11} - b_{11}\beta)\Gamma z, \omega_1 = a_{12}\Gamma' z - R^2\beta\Gamma / z,$$

$$\varphi_2 = \Gamma z + b_{12}\bar{\Gamma}'R^2 / z, \omega_2 = \Gamma' z + R^2(b_{11} - a_{21}\beta)\Gamma / z,$$

де $\Gamma = (N_1 + N_2)/4$, $\Gamma' = -(N_1 - N_2)e^{-2i\alpha} / 2$.

Підставивши потенціали (6) в співвідношення для знаходження вектора напружень на берегах тріщини при $z \in L$ і на границях отворів при $z \in H$ та прирівнявши їх до заданих функцій q_T, q_H , отримано інтегральне рівняння для визначення функцій Q . Для чисельного розв'язування цих рівнянь використано метод механічних квадратур [2].

В якості прикладу дослідимо вплив неоднорідності матеріалу на КІН у пластинці з несиметрично розміщеною тріщиною півдовжини l , яка паралельна до вісі Ox . На рис. 1.а при $l/R=0.5$ наведено залежність безрозмірних КІН $K_{A1} = K_I(A) / p\sqrt{\pi l}$, $K_{A2} = K_{II}(A) / p\sqrt{\pi l}$, $K_{B1} = K_I(B) / p\sqrt{\pi l}$, $K_{B2} = K_{II}(B) / p\sqrt{\pi l}$ залежно від відношення модулів Юнга E_1 / E_2 для випадку рівномірного розтягу пластинки на нескінченності зусиллями p , які діють під кутом 45^0 до вісі Ox . При розрахунках приймалось $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, тріщина паралельна до вісі Oy , її центр розміщено в точці $(0.25R, 0.25R)$.

Аналогічні результати коли тріщина розміщена у матриці та її центр знаходиться в точці $(2R, 0.25R)$ наведено на рис. 1, б.

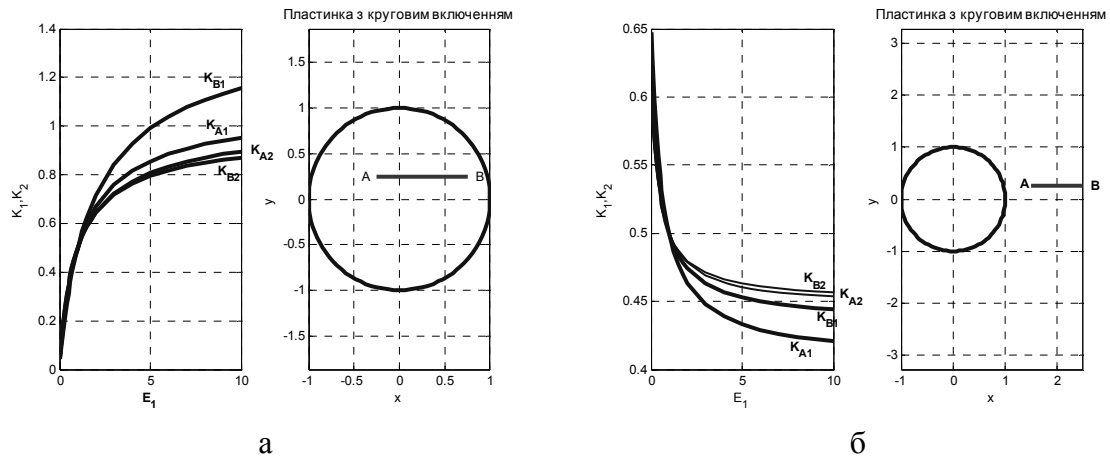


Рис. 1. Залежність безрозмірних КІН від відношення модулів Юнга включення і матриці для прямолінійної несиметрично розміщеної тріщини

Аналогічні розрахунки для тріщини, що розміщена на дузі кола радіуса $R/2$ при $5\pi/4 < \varphi < 7\pi/4$ наведено на рис.2. Зліва наведені графіки для випадку, коли центр тріщини розміщений в точці $(0, 0.5R)$, справа - в точці $(1.75R, 0.5R)$.

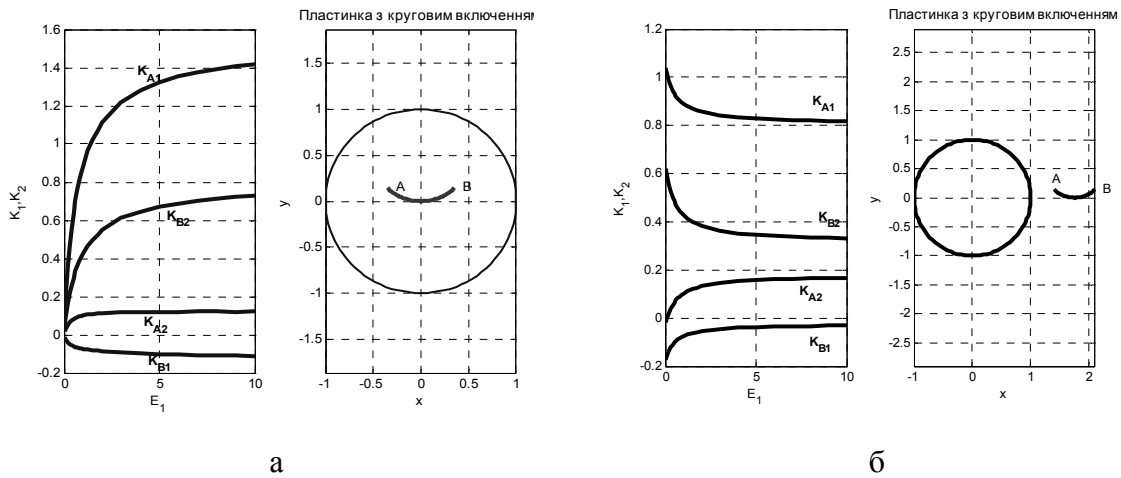


Рис. 2. Залежність безрозмірних КІН від відношення модулів Юнга включення і матриці для тріщини, що розміщена на дузі кола

Виконані розрахунки КІН для прямолінійної тріщини, в тому числі у часткових випадках, коли включення абсолютне гнучке або жорстке добре узгоджуються із даними робіт [2, 3].

Висновки. Із наведених графіків випливає, що неоднорідність матеріалу включення істотно впливає на значення КІН в пластинках. У всіх розглянутих випадках при розміщенні тріщини у включенні, яке жорсткіше відносно матриці, значення КІН більші за величиною, ніж в однорідній пластинці. Для випадку, коли матриця послаблена тріщиною, КІН зменшуються при зростанні в ній модуля Юнга.

Список літератури

1. Божидарнік В.В., Максимович О.В., Максимович Я.В. Алгоритм та комплекси програм для розрахунку траєкторій та швидкості розповсюдження втомних тріщин в пластинках // Механічна втома металів: Праці міжнародного колоквиуму, Тернопіль, 25-28 вересня 2006.- Тернопільський державний технічний університет ім. Пулюя. – С. 456-461.
2. Кит Г.С., Кривцун М.Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. – Киев – Наук. думка, 1983. - 280 с.
3. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. –М.: Наука, 1966. –708 с.
4. Саврук М.П., Осив П.Н., Прокопчук И.В. Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – К.: Наук.думка, 1989. – 248 с.
5. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. В 2-х томах / Под ред. Ю. Мураками. –М.: Мир, 1990. - т. 1. – 448 с.

УДК 66.02.011

**О.С.Сахаров, д-р.техн.наук, В.І.Сівецький, канд.техн.наук,
О.Л.Сокольський, канд.техн.наук., В.Ю.Щербина, канд.техн.наук
Національний технічний університет України “КПІ”, м.Київ, Україна**

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕЧІЇ В'ЯЗКОПЛАСТИЧНИХ СЕРЕДОВИЩ З УРАХУВАННЯМ ПРУЖНОСТІ КОНСТРУКТИВНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ОБЛАДНАННЯ

Целью данной работы является построение на базе моментной схемы конечных элементов универсальных соотношений механики сплошных сред, которые дают возможность моделировать термонапряженное состояние и процессы переработки и формования таких нелинейных рабочих сред, как расплавы полимеров, сыпучие и пластичные массы в изделия с учетом процессов твердения и влияния остаточных напряжений на свойства конечных изделий. Полученные на основе моментной схемы матрицы конечных элементов являются универсальными для решения задач механики как твердых тел, так жидкостей и газов. Это позволяет на современном уровне выполнять расчеты прочности и выносливости конструкций, разрабатывать новые технологические процессы переработки материалов с учетом их реальных свойств и особенностей взаимодействия с элементами оборудования.

The construction is the purpose of this work on the base of moment chart of finite elements of universal correlations of mechanics of continuous environments which enable to design the thermostress state and processes of processing and forming of such nonlinear working environments, as fusions of polymers, friable and plastic the masses in wares taking into account the processes of solidifiability and influencing of remaining tensions on properties of eventual wares. Got on the basis of moment chart of matrix of complete elements are universal for the decision of tasks of mechanics of solids, liquids and gases. It allows up-to-date to execute the calculations of durability and endurance of constructions, develop the new technological processes of processing of materials taking into account their real properties and features of co-operation with the elements of equipment.

Вступ

Сучасні технології хімічних виробництв супроводжуються використанням високих тисків та температур, які суттєво впливають і на матеріали, що переробляються, і на обладнання [1, 2]. В багатьох випадках врахування взаємодії матеріалів з силовими елементами машин та апаратів є необхідною умовою при розробці технологічних процесів і проектуванні обладнання хімічних виробництв.