Согласно данному методу оптимизации оптимальными режимами обработки являются t_{opt}=0,12 мм S_{opt}=0,02 мм/об.

Выводы о результатах исследования

1. Задача оптимизации режимов резания по критерию точности обработки решена двумя методами, которые дали близкие результаты. Оптимальные значения близки к тем, что применяются на практике. Это свидетельствует о правильности полученных результатов и о равноценности этих методов.

2. Недостатком в постановке данной задачи является наличие небольшого числа оптимизируемых параметров обработки, что обусловлено применением в качестве критерия оптимизации модели, полученной на основе имитационного моделирования. В дальнейшем необходимо в состав оптимизируемых факторов включить также параметры режущего инструмента, и решать задачу оптимизации по нескольким критериям, которые характеризуют выходные параметры обработки.

Список литературы

1. Ясев А.Г., Меженная К.Г. Моделирование отказа метода механической обработки // Математическое моделирование. – 2007. - №2 (17) – С. 112-115.
2. Ясев А.Г. Соответствие математических моделей и технологических процессов в металлургии и машиностроении. – Днепропетровск: Днепр-VAL, 2001. – 237с.
3. Карманов В.Г. Математическое программирование. – М.: Наука, 1975. – 272с.

УДК 621.43 : 517.9

К.М. Рудаков, д-р техн.наук, проф., С.В. Мороз
НТУ України"Київський політехнічний інститут" м.Київ, Україна

ЧИСЕЛЬНИЙ АЛГОРИТМ ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТІ З УРАХУВАННЯМ ІЗОТРОПНО-КІНЕМАТИЧНОГО ЗМІЦНЕННЯ МАТЕРІАЛУ

Предложен численный алгоритм термопластичности с учетом изотропно-кинематического упрочнения изотропного материала. Используется итерационный процесс Ньютона для сбалансированного разделения деформаций на упругие, температурные и пластические деформации. Алгоритм универсален с точки зрения моделей с изотропно-кинематическим упрочнения.

The numerical algorithm of thermo-plasticity taking into account isotropic-kinematic hardening of an isotropic material is offered. Newton's iterative process for the balanced division of deformations into elastic, temperature and plastic deformations is used. The algorithm is universal from the point of view of models with isotropic-kinematic hardenings.

Вступ

Наявність необоротних (пластичних) деформацій обумовлює нелінійність крайової задачі. Тому система алгебраїчних рівнянь, яка буде виникати після алгебраїзації задачі, буде теж нелінійною і буде розв’язуватися певним ітераційним методом.

Звичайно ці ітерації називають зовнішніми. Кількість саме зовнішніх ітерацій визначає загальну ефективність алгоритму. Завдання подальших досліджень для удосконалення алгоритмів полягає у зменшенні кількості зовнішніх ітерацій. Це можна зробити завдяки вдосконаленню внутрішніх алгоритмів.

Фізичні рівняння теорії пластичності з ізотропно-кінематичним зміцненням матеріалу

У статті [1] був запропонований ефективний алгоритм термопластичності для ізотропних матеріалів з ізотропним зміцненням. Цей алгоритм можна узагальнити на випадок ізотропно-кінематичного зміцнення матеріалу. За основу обрано інкрементальну теорію пластичності, узагальнену на термопластичність. Будемо вважати, що в тілі реалізуються деформації: температурні ε_{ij}^{T}, пружні ε_{ij}^{e} та пластичні ε_{ij}^{p}.

Рівняння теорії можуть бути представлені як сукупність трьох законів:

- закон пружної зміни елементарного *об'єму* матеріалу: за рахунок пластичних деформацій зміни об'єму не спостерігається, тобто $d\varepsilon_V^p = 0$, а $d\sigma_V = 3K \cdot d\varepsilon_V^S$, де K – об'ємний модуль пружності; $\sigma_V = \delta_{ij}\sigma_{ij}/3$, $\varepsilon_V = \delta_{ij}\varepsilon_{ij}/3$ – відповідно середні (об'ємні) напруження і деформації; $\varepsilon_{mn}^S = \varepsilon_{mn} - \varepsilon_{mn}^N$ є деформаціями, які можна обмежувати (деформації ε_{mn}^N, які не вдається обмежувати, зазвичай представляються температурними деформаціями ε_{mn}^T та деформаціями фазових перетворень). Завдяки цьому закону компоненти деформацій визначаються як $\varepsilon_{mn}^p = e_{mn}^p$.
- закон зміни *форми* елементарного об'єму матеріалу:

$$de_{mn}^p = d\lambda^p \cdot (S_{mn} - \alpha_{mn}), \tag{1}$$

де $e_{mn}^p = \varepsilon_{mn}^p - \delta_{mn}\varepsilon_V^p$ –компоненти девіаторної частини тензора пластичних деформацій ε_{mn}^p; $d\lambda^p$ – функціонал; $S_{mn} = \sigma_{mn} - \delta_{mn}\sigma_V$ і α_{mn} – компоненти девіаторної частини тензорів напружень і „мікронапружень" відповідно; δ_{ij} – символи Кронекера.

- рівняння „миттєвої термомеханічної поверхні":

$$f(S_{mn} - \alpha_{mn}) = F(\varepsilon_u^S, T, \sigma_V), \tag{2}$$

де ε_u^S є інтенсивністю деформацій ε_{mn}^S; T – температура. Замість рівняння (2) часто застосовують вираз через параметр Одквіста $\chi = \int d\chi$, де $d\chi = (2de_{mn}^p de_{mn}^p/3)^{1/2}$:

$$f(S_{mn} - \alpha_{mn}) = H(\chi, T, \sigma_V), \tag{3}$$

Вважають, що $f(S_{mn}-\alpha_{mn}) = [3(S_{mn}-\alpha_{mn})(S_{mn}-\alpha_{mn})/2]^{1/2} = \sigma_u^a$, тобто $f(S_{mn}-\alpha_{mn})$ дорівнює інтенсивності „активних" напружень $S_{mn}^a = S_{mn} - \alpha_{mn}$.

Ідея використання кінематичного зміцнення для пружно-пластичного матеріалу, яка була запропонована А.Ю. Ішлінським, виявилася дуже продуктивною. У статті [2] він запропонував визначати α_{mn} залежністю вигляду $\alpha_{mn} = \zeta \cdot \varepsilon_{mn}^{p}$, де $\zeta = const$. Ю.І. Кадашевич із В.В. Новожиловим [3] прийшли до висновку, що краще використовувати умову $\zeta = \zeta(\alpha_u)$, де $\alpha_u = (3\alpha_{mn}\alpha_{mn}/2)^{1/2}$ є інтенсивністю „мікронапружень".

Для визначення приросту $d\alpha_{mn}$ Г. Циглер (Zigler H.) [4] запропонував залежність:

$$d\alpha_{mn} = d\lambda^{\alpha} \cdot (S_{mn} - \alpha_{mn}), \tag{4}$$

де $d\lambda^{\alpha}$ – функціонал. Оскільки в (1) і (4) праві частини містять той самий тензор $(S_{mn} - \alpha_{mn})$, то згідно з ідеєю Г. Циглера тензори, що розташовані у лівій частині формул, зв'язані між собою залежністю

$$d\alpha_{mn} = g \cdot d\varepsilon_{mn}^{p}, \tag{5}$$

де функціонал g може мати різні варіанти запису (враховується, що $\varepsilon_{mn}^{p} = e_{mn}^{p}$). Зокрема, В. Прагер (Prager W.) [5] запропонував вважати, що

$$g = B = const, \tag{6}$$

а Р.А. Арутюнян і А.А. Вакуленко [6], що

$$g = g(\sigma_u), \tag{7}$$

де $\sigma_u = (3S_{mn}S_{mn}/2)^{1/2}$ – інтенсивність напружень.

Запропоновано ще багато інших залежностей для визначення функціонала g. Майже всі вони можуть бути записані у наступному загальному вигляді:

$$g = g(\sigma_u, \alpha_u, \varepsilon_u^{S}, T) \quad \text{або} \quad g = g(\sigma_u, \alpha_u, \chi, T). \tag{8}$$

В статті [7] показано, що більш точною, ніж (5), є залежність

$$d\alpha_{mn} = g \cdot d\varepsilon_{mn}^{p} + dg \cdot \varepsilon_{mn}^{p}, \tag{9}$$

де другий член суми може бути значно меншим першого, якщо функціонал g в процесі пластичного деформування матеріалу змінюється незначно.

Отримання загальної формули для розрахунку напружень

У всій сукупності залежностей, необхідних для розв'язування крайової задачі, існує блок формул, які здійснюють розрахунок напружень σ_{mn}, „мікронапружень" α_{mn} та приростів пластичних деформацій $d\varepsilon_{ij}^{p}$ в точці тіла. Розглянемо його. Проблему можна формалізувати як збалансований розподіл деформацій $d\varepsilon_{ij}^{S} = d\varepsilon_{ij} - d\varepsilon_{ij}^{T}$ на пружну $d\varepsilon_{ij}^{e}$ та необоротну (пластичну) $d\varepsilon_{ij}^{p}$ складові. Від того, наскільки точно це буде зроблено, залежить загальна кількість зовнішніх ітерацій. Зокрема, якщо компоненти $d\varepsilon_{ij}^{p}$ обчислювати тільки на основі S_{mn} та α_{mn} з попередньої зовнішньої ітерації, то кількість таких ітерацій буде на декілька відсотків більше, ніж після використання запропонованих нижче алгоритмів.

Повний диференціал закону Гука $\sigma_{mn} = E_{mnij}(T)\varepsilon_{ij}^{e}$ з урахуванням залежності модулів пружності від температури має вигляд:

$$d\sigma_{mn} = E_{mnij}(T) \cdot d\varepsilon_{ij}^{e} + \frac{\partial E_{mnij}(T)}{\partial T} dT \cdot \varepsilon_{ij}^{e} = E_{mnij}(T) \cdot d\varepsilon_{ij}^{e} + d\sigma_{mn}^{T}, \quad (10)$$

де позначено:

$$d\sigma_{mn}^{T} = \frac{\partial E_{mnij}(T)}{\partial T} dT \cdot \varepsilon_{ij}^{e} = \frac{\partial E_{mnij}(T)}{\partial T} dT \cdot C_{ijkq}(T) \cdot \sigma_{kq}.$$

Тут C_{ijkq} є тензором пружних модулів при запису закону Гука у вигляді $\varepsilon_{ij}^{e} = C_{ijmn}(T) \cdot \sigma_{mn}$. У статті [8] показано, що при переході від нескінченно малих до скінченних приростів складова $\Delta\sigma_{mn}^{T}$ обчислюється за формулою

$$\Delta\sigma_{mn}^{T} = [E_{mnij}(T) - E_{mnij}(T_0)] \cdot C_{ijkq}(T_0) \cdot (\sigma_{kq})_0, \quad (11)$$

де нижній індекс «0» вказує на значення на початку етапу навантаження, а T без індексу – температура на кінець актуального етапу. Відзначимо, що під час отримання формули (11) на тензор модулів пружності не накладали ніяких обмежень щодо можливої анізотропії, тобто формула справедлива для матеріалу з будь-яким ступенем анізотропії, зокрема й для ізотропного матеріалу. Формула (11) фактично стверджує, що модулі пружності матеріалів не мають довгої пам'яті при зміні температури і є миттєвими.

І в інших виразах також перейдемо від нескінченно малих до скінченних приростів. Отже, замість (10) отримаємо, що

$$\Delta\sigma_{mn} = E_{mnij}(T) \cdot (\Delta\varepsilon_{ij}^{S} - \Delta\varepsilon_{ij}^{p}) + \Delta\sigma_{mn}^{T} = \Delta\sigma_{mn}^{\#} - E_{mnij}(T) \cdot \Delta\varepsilon_{ij}^{p}, \quad (12)$$

де має місце наступне позначення: $\Delta\sigma_{mn}^{\#} = E_{mnij}(T) \cdot \Delta\varepsilon_{ij}^{S} + \Delta\sigma_{mn}^{T}$.

Введемо в розгляд тензор, який вважаємо відомим

$$\sigma_{mn}^{\#} = (\sigma_{mn})_0 + \Delta\sigma_{mn}^{\#}.$$

Тоді з врахуванням (12) отримаємо формулу для розрахунку напружень

$$\sigma_{mn} = (\sigma_{mn})_0 + \Delta\sigma_{mn} = \sigma_{mn}^{\#} - E_{mnij}(T) \cdot \Delta\varepsilon_{ij}^{p}. \quad (13)$$

Знаходження напружень у випадку пружно-ізотропного матеріалу

Для пружного ізотропного матеріалу $E_{mnij}(T) = G(T) \cdot (\delta_{mi}\delta_{nj} + \delta_{mj}\delta_{ni}) +$ $+ \lambda(T) \cdot \delta_{mn}\delta_{ij}$, де $G(T)$ й $\lambda(T)$ – пружні характеристики матеріалу (постійні Ламе).

В силу закону пластичної нестисливості для ізотропного матеріалу з формули (13) отримаємо, що

$$\sigma_{mn} = \sigma^{\#}_{mn} - 2G(T)\cdot\Delta\varepsilon^{p}_{ij}\,; \quad \sigma_V = \delta_{mn}\sigma_{mn} = \delta_{mn}(\sigma^{\#}_{mn} - 2G(T)\cdot\Delta\varepsilon^{p}_{mn}) = \sigma^{\#}_V\,, \qquad (14)$$

тоді з (14) запишемо вираз для компонентів девіатора напружень

$$S_{mn} = \sigma^{\#}_{mn} - \sigma^{\#}_V - 2G(T)\cdot\Delta\varepsilon^{p}_{mn} = S^{\#}_{mn} - 2G(T)\cdot\Delta\varepsilon^{p}_{mn}\,. \qquad (15)$$

Віднімемо α_{mn} з (15):

$$(S_{mn} - \alpha_{mn}) = (S^{\#}_{mn} - \alpha_{mn}) - 2G(T)\cdot\Delta\varepsilon^{p}_{mn}\,. \qquad (16)$$

Згідно з формулою (1) тензори $\Delta\varepsilon^{p}_{mn}$ і $(S_{mn} - \alpha_{mn})$ співвісні. Тому в (16) їм співвісний і тензор $(S^{\#}_{mn} - \alpha_{mn})$. Тоді існують пропорції:

$$(S_{mn} - \alpha_{mn}) = r\cdot(S^{\#}_{mn} - \alpha_{mn}) \quad \text{та} \quad f(S_{mn} - \alpha_{mn}) = r\cdot f(S^{\#}_{mn} - \alpha_{mn})\,, \qquad (17)$$

де $r \leq 1$ – скаляр. Підставимо перший вираз (17) в (16), отримаємо, що

$$2G(T)\cdot\Delta\varepsilon^{p}_{mn} = (1-r)\cdot(S^{\#}_{mn} - \alpha_{mn})\,. \qquad (18)$$

З урахуванням $\alpha_{mn} = (\alpha_{mn})_0 + d\alpha_{mn}$ та (9), із (18) отримаємо, що

$$\Delta\varepsilon^{p}_{mn} = \frac{1-r}{2G(T) + (1-r)\cdot g}\cdot[S^{\#}_{mn} - (\alpha_{mn})_0 - dg\cdot\varepsilon^{p}_{mn}]\,. \qquad (19)$$

Наявність двох різних виразів для $f(S_{mn} - \alpha_{mn})$, а саме (2) та (3), приводить до двох варіантів подальших дій.

Варіант 1.

Із застосуванням (2) та (14) другий вираз (17) змінюється на

$$r = F(\varepsilon^{S}_u,\, T,\, \sigma^{\#}_V)\,/\,f(S^{\#}_{mn} - \alpha_{mn})\,.$$

Оскільки компоненти α_{mn} тут є невідомими, то для визначення r необхідні додаткові дії. Ефективною буде така ітераційна процедура:

$$(\alpha_{mn})^{(0)} = \tilde{\alpha}_{mn}\,; \quad g^{(0)} = \tilde{g}\,;$$

$$r^{(k)} = F(\varepsilon^{S}_u, T, \sigma^{\#}_V)\,/\,f(S^{\#}_{mn} - (\alpha_{mn})^{(k-1)})\,; \quad k = 1\,; \qquad (*)$$

$$(\Delta\varepsilon^{p}_{mn})^{(k)} = \frac{1-r^{(k)}}{2G(T) + (1-r^{(k)})\cdot g^{(k-1)}}\cdot\left[S^{\#}_{mn} - (\alpha_{mn})_0 - \Delta g^{(k-1)}\cdot(\varepsilon^{p}_{mn})^{(k-1)}\right];$$

$$(\varepsilon^{p}_{mn})^{(k)} = (\varepsilon^{p}_{mn})^{(k-1)} + (\Delta\varepsilon^{p}_{mn})^{(k)}\,; \qquad (20)$$

$$g^{(k)} = \ldots\,; \quad \Delta g^{(k)} = \ldots\,;$$

$$(\alpha_{mn})^{(k)} = (\alpha_{mn})_0 + g^{(k)}\cdot(\Delta\varepsilon^{p}_{mn})^{(k)} + \Delta g^{(k)}\cdot(\varepsilon^{p}_{mn})^{(k)}\,;$$

Якщо $\left| r^{(k)} - r^{(k-1)} \right| > \varsigma \cdot r^{(k)}$, то $k = k+1$, перехід на рядок (*);

Інакше r, ε_{mn}^{p} та α_{mn} є знайденими.

Тут ς – задана точність, а нижній індекс «0» знов указує на значення на початку актуального етапу навантаження.

В якості $\tilde{\alpha}_{mn}$ та $\tilde{g}$ обираються останні з обчислених у попередніх ітераціях значення (вихідні значення $\tilde{\alpha}_{mn}$ – нулі).

Функціонали g та Δg в п'ятому рядку (20) обчислюються відповідно до формул (6) … (8) або інших. У випадку застосування (6) проблем немає: g є константа, а $\Delta g \equiv 0$. Якщо використовується (7) або (8), то інтенсивність напружень σ_u для функціонала $g(\sigma_u)$ або $g(\sigma_u, \alpha_u, \varepsilon_u^S, T)$ обчислюється при $k = 1$ як

$$\sigma_u \approx F(\varepsilon_u^S, T, \sigma_V^{\#}) + (\alpha_u)^{(0)},$$

а при $k > 1$ – через компоненти (див. формулу (15)):

$$(S_{mn})^{(k-1)} = S_{mn}^{\#} - 2G(T) \cdot (\Delta\varepsilon_{mn}^{p})^{(k-1)} \quad \text{й} \quad (S_{mn})^{(k)} = S_{mn}^{\#} - 2G(T) \cdot (\Delta\varepsilon_{mn}^{p})^{(k)} \qquad (21)$$

для формул третього та п'ятого рядка (20) відповідно.

Пояснимо, що формула в третьому рядку (20) є наближеним співвідношенням (9), яке записане у приростах.

Після завершення ітерацій компоненти S_{mn} стають відомими з другого виразу (21), тому компоненти тензора напружень у точці тіла обчислюються як

$$\sigma_{mn} = S_{mn} + \delta_{mn} \sigma_V^{\#}. \qquad (22)$$

Варіант 2.

Згорнемо вираз (18) та зробимо зворотну підстановку (див. формулу (17)). Отримаємо:

$$3G(T) \cdot \Delta\chi = (1 - r) \cdot f(S_{mn}^{\#} - \alpha_{mn}) = f(S_{mn}^{\#} - \alpha_{mn}) - f(S_{mn} - \alpha_{mn}),$$

З огляду на вирази (3) і (14), а також позначивши $\chi \approx \chi_0 + \Delta\chi$, отримаємо нелінійне скалярне рівняння відносно $\Delta\chi$:

$$3G(T) \cdot \Delta\chi \approx f(S_{mn}^{\#} - \alpha_{mn}) - H(\chi_0 + \Delta\chi, T, \sigma_V^{\#}). \qquad (23)$$

Але в ньому крім $\Delta\chi$ невідомий ще й тензор α_{mn}. Додатково необхідно залучити рівняння (5) з функціоналом (6), (7), другим виразом з (8) або іншим, записаним через параметр Одквіста.

Розв'язок системи можна шукати різними способами. Розглянемо алгоритм на основі методу Ньютона, аналогічний тому, що використовувався в статті [1].

Розкладемо вирази для функції $H(\chi, T, \sigma_V^\#)$ в околі χ_0 й обмежимося двома першими членами ряду:

$$H(\chi_0 + \Delta\chi, T, \sigma_V^\#) \approx H(\chi_0, T, \sigma_V^\#) + H'(\chi_0, T, \sigma_V^\#) \cdot \Delta\chi\,, \qquad (24)$$

де $H' = \partial H / \partial\chi$. Підставимо (24) в (23), отримаємо

$$f(\sigma_{mn}^\# - \alpha_{mn}) - H(\chi_0, T, \sigma_V^\#) - H'(\chi_0, T, \sigma_V^\#) \cdot \Delta\chi \approx 3G(T) \cdot \Delta\chi\,,$$

або

$$\Delta\chi \approx \frac{f(S_{mn}^\# - \alpha_{mn}) - H(\chi_0, T, \sigma_V^\#)}{3G(T) + H'(\chi_0, T, \sigma_V^\#)}\,.$$

Це є узагальнення формули (21) зі статті [1] на випадок врахування кінематичної складової зміцнення.

З огляду на достатню гладкість функції $H(\chi, T, \sigma_V^\#)$ відносно χ, ефективним буде наступний ітераційний процес:

$(\alpha_{mn})^{(0)} = \tilde{\alpha}_{mn}; \quad g^{(0)} = \tilde{g}$;

$\Delta\chi^{(1)} = \dfrac{f(S_{mn}^\# - (\alpha_{mn})^{(0)}) - H(\chi_0, T, \sigma_V^\#)}{3G(T) + H'(\chi_0, T, \sigma_V^\#)}; \quad k = 1$;

$r = H(\chi_0 + \Delta\chi^{(k)}, T, \sigma_V^\#) / f(S_{mn}^\# - (\alpha_{mn})^{(k-1)})$; (**)

$(\Delta\varepsilon_{mn}^p)^{(k)} = \dfrac{1 - r^{(k)}}{2G(T) + (1 - r^{(k)}) \cdot g^{(k-1)}} \cdot \left[S_{mn}^\# - (\alpha_{mn})_0 - \Delta g^{(k-1)} \cdot (\varepsilon_{mn}^p)^{(k-1)}\right]$;

$(\varepsilon_{mn}^p)^{(k)} = (\varepsilon_{mn}^p)^{(k-1)} + (\Delta\varepsilon_{mn}^p)^{(k)}$;

$g^{(k)} = \ldots; \quad \Delta g^{(k)} = \ldots$; (25)

$(\alpha_{mn})^{(k)} = (\alpha_{mn})_0 + g^{(k)} \cdot (\Delta\varepsilon_{mn}^p)^{(k)} + \Delta g^{(k)} \cdot (\varepsilon_{mn}^p)^{(k)}$;

$Q^{(k)} = f(\sigma_{mn}^\# - (\alpha_{mn})^{(k)}) - 3G(T) \cdot \Delta\chi^{(k)}$;

$\delta\chi = \dfrac{Q^{(k)} - H(\chi_0 + \Delta\chi^{(k)}, T, \sigma_V^\#)}{3G(T) + H'(\chi_0 + \Delta\chi^{(k)}, T, \sigma_V^\#)}$;

$\Delta\chi^{(k+1)} = \Delta\chi^{(k)} + \delta\chi$;

Якщо $|\delta\chi| > \varsigma \cdot \Delta\chi^{(k+1)}$, то $k = k + 1$, перехід на рядок (**);

Інакше $\Delta\chi$ та α_{mn} є знайденими.

Функціонали g та Δg у шостому рядку (25) обчислюються відповідно до формул (6) … (8) або інших. У випадку застосування (6) знову проблем немає: g є константа, а $\Delta g \equiv 0$. Якщо використовується (7) або другий вираз (8), то інтенсивність напружень σ_u для функціонала $g(\sigma_u)$ або $g(\sigma_u, \alpha_u, \chi, T)$ обчислюється при $k = 1$ як

$$\sigma_u \approx H(\chi_0 + \Delta\chi^{(1)}, T, \sigma_V^\#) + (\alpha_u)^{(0)},$$

а при $k > 1$ для формул четвертого та п'ятого рядка (25), відповідно, – через використання формул (21). Після завершення ітерацій компоненти тензора напружень у точці тіла обчислюються згідно з формулою (22).

Чисельні експерименти показали, що при $\varepsilon = 10^{-2}$ звичайно достатньо до п'яти ітерацій процесів (20) або (25), при $\varepsilon = 10^{-6}$ – до шести, при $\varepsilon = 10^{-8}$ – до семи, тобто ці ітераційні процеси дійсно є ефективними.

Висновки

Запропонована велика кількість теорій пластичності, розгляд яких є неможливим в рамках статті. В залежності від специфіки конкретних фізичних рівнянь чисельні алгоритми можуть бути більш-менш складними. Однак у кожному випадку варто віддавати перевагу алгоритмам типу (20) та (25), які роблять збалансований поділ деформацій різної природи в точці тіла із використанням локальних ітерацій, не переносячи цю проблему на зовнішні ітерації розв'язування нелінійної системи алгебраїчних рівнянь, оскільки в останньому випадку дещо збільшується кількість саме зовнішніх ітерацій, що зумовлює збільшення часу при розрахунках крайової задачі.

Список літератури

1. Рудаков К.Н. Об эффективности алгоритмов определения напряжений и пластических деформаций при численном моделировании процессов термосилового нагружения элементов конструкций // Пробл. прочности. – 1992. – № 9. – С. 18-24.
2. Ишлинский А.Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Укр. матем. журн. – 1954. – № 3. – С. 314-325.
3. Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В. Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения // Прикл. математика и механика. – 1958. – 22. – вып. 1. – С. 78-89.
4. Zigler H. A modification of Prager's hardening rule // Quart. Appl. Math. – 1959. – vol. 17. – N1. – P. 55-65. (рус. пер. Циглер Г. Видоизменение закона упрочнения, предложенного Прагером // Сб. Механика. М.: И.Л. – 1960. – 60. – №2. – С. 35-95.)
5. Prager W. Probleme der Plastizitätstheorie // Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1955. (рус. пер. Прагер В. Проблемы теории пластичности. – М.: Физматгиз, 1958. – 136 с.)
6. Арутюнян Р.А., Вакуленко А.А. О многократном нагружении упругопластической среды // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. Механика. – 1965. – № 4. – С. 53-61.
7. Лепихин П.П. К вопросу моделирования упрочнения в теории течения // Пробл. прочности. – 1989. – № 12. – С. 44-47.
8. Рудаков К.Н. Эффективный алгоритм расчета элементов конструкций на ползучесть в рамках метода конечных элементов // Пробл. прочности. – 1992. – № 4. – С. 8-13.