

З.Я. Лурье<sup>1</sup>, д-р техн. наук, проф., М.М. Макаренко<sup>1</sup>, А.Н.Скляревский<sup>2</sup>, д-р техн. наук  
 1-НТУ «Харьковский политехнический институт», г. Харьков, Украина  
 2-Институт машиностроения, г. Санкт-Петербург, Россия

## К ВОПРОСУ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЪЁМНЫХ ГИДРОАГРЕГАТОВ С ДЛИННЫМИ ТРУБОПРОВОДАМИ

*У статті викладається методика моделювання динамічних характеристик об'ємних гідроагрегатів з довгими трубопроводами, що включає створення спеціального обчислювального блоку для рішення методом характеристик системи гіперболічних рівнянь, що описують хвильові процеси*

*In article the technique of modelling of dynamic characteristics of volumetric hydrounits with the long pipelines, including creation of the special computing block for the characteristics solution of system of the hyperbolic equations describing wave processes is stated*

### Введение

При математическом моделировании гидроагрегатов (ГА) различных технологических механизмов и машин, подверженных нестационарным нагрузкам вследствие многократного переключения органов управления, возникает следующая задача. Математические модели насоса, гидроаппаратов, гидродвигателей (гидроцилиндра или гидромотора), исполнительных механизмов, а также нагрузки, описывались и описываются в настоящее время линейными и нелинейными дифференциальными уравнениями с обыкновенными производными. Порядок дифференциального уравнения при разрешении системы уравнений объекта моделирования относительно одной из переменных для ряда ГА составляет от 7 до 20. В тоже время длинные трубопроводы, как элементы ГА, описываются системой гиперболических дифференциальных уравнений с частными производными [1, 2].

Одна из моделей, которая с достаточной для практики точностью решает эту задачу в случае ламинарного режима течения, основана на линеаризованных двумерных уравнениях Навье-Стокса в цилиндрических координатах [3]

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p_T}{\partial x_T} - \nu \rho \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{E} \frac{\partial p_T}{\partial t} + \frac{v}{r} + \frac{\partial u}{\partial x_T} = 0, \quad (2)$$

где  $u(r, x_T, t)$  – составляющая скорости жидкости в осевом направлении;  $v(x_T, r, t)$  – составляющая скорости жидкости в радиальном направлении;  $x_T, r$  – координаты в осевом и радиальном направлениях;  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости и плотность жидкости;  $p_T$  – среднее значение давления в произвольном сечении трубопровода;  $E$  – модуль объёмной упругости жидкости.

Уравнения количества движения (1) и неразрывности (2) получены при следующих допущениях: поток ламинарный, изотермический и осесимметричный; упругость стенок трубопровода мала в сравнении с сжимаемостью жидкости; начальный участок движения мал (длина трубопровода больше 20 диаметров); средняя скорость жидкости меньше скорости распространения звука в жидкости; массовые силы пренебрежимо малы; составляющая скорости жидкости в окружном направлении пренебрежимо мала; изменения температуры и давления настолько малы, что изменения вязкости и плотности жидкости можно считать малыми.

### Анализ публикаций

Уравнения (1), (2) являются квазилинейными гиперболическими дифференциальными уравнениями в частных производных, решение которых может быть выполнено с помощью метода характеристик [3, 4]. При использовании этого метода уравнения (1), (2) подвергаются осреднению скорости и давления в произвольном сечении трубопровода, и модель становится одномерной [3, 4]

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial v_{cp}}{\partial t} + \frac{\partial p_T}{\partial x_T} + F(t) &= 0, \\ \frac{\partial v_{cp}}{\partial x_T} + \frac{1}{E} \frac{\partial p_T}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где  $v_{cp}(x,t) = \frac{1}{\pi r_T^2} \int_0^{r_T} 2\pi r_T v dr$ ,  $F(t) = \frac{8\rho v}{r_T^2} v_{cp}(x,t) + \frac{4\rho}{r_T^2} \int_0^t \frac{\partial v_{cp}(x,t_1)}{\partial t_1} W^*(t-t_1) dt_1$  - падение давления на единицу длины трубопровода;  $W^*$  - весовая функция, которая учитывает изменения скорости в прошедшие моменты времени;  $r_T$  - радиус трубопровода.

Первое слагаемое  $F(t)$  составляет квазистационарное трение и оно совпадает с силой трения в уравнении Пуазейля, второе слагаемое (интеграл) учитывает с определённым весом всю предысторию изменения средней скорости в сечении (перестройку профиля скоростей) и названо нестационарным трением жидкости о стенки трубопровода.

Решение уравнений (3) методом характеристик основывается на следующем подходе: начальное условие в некоторой точке  $x$  переносится в  $tx$  - плоскости со скоростью звука  $C$  в жидкости вдоль линии, которая называется характеристикой. Исходные уравнения (3) превращаются в обыкновенные дифференциальные уравнения, которые справедливы на этих характеристиках

$$\rho \frac{dv_{cp}}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dp_T}{dt} + F(t) = 0, \quad (4)$$

которое справедливо на характеристике

$$\frac{dx}{dt} = C \quad (5)$$

и

$$\rho \frac{dv_{cp}}{dt} - \frac{1}{C} \frac{dp_T}{dt} + F(t) = 0, \quad (6)$$

которое справедливо на характеристике

$$\frac{dx}{dt} = -C, \quad (7)$$

где  $C = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ .

Таким образом, дифференциальное уравнение (4) можно проинтегрировать вдоль характеристики  $\frac{dx}{dt} = C$  (формула (5)), а дифференциальное уравнение (6) вдоль характеристики  $\frac{dx}{dt} = -C$  (формула (7)).

### **Постановка задачи**

Современные пакеты динамического моделирования SIAM, VisSim, Simulink и другие позволяют с широкими возможностями решать системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка различными методами интегрирования на базе структурно–функциональных схем моделируемого объекта – аналогов исходных уравнений. Представленная в этом виде модель, набирается с помощью блоков, выполняющих практически все математические операции, с необходимыми связями, функциональными преобразованиями и выводом текущей и конечной информации на монитор и печать.

Однако при математическом моделировании объёмных гидроагрегатов с длинными трубопроводами, подверженных нестационарным нагрузкам, в составе пакета, например VisSim, нет блока, с помощью которого методом характеристик можно решить динамические процессы в трубопроводе по уравнениям (3)–(7) и согласовать граничные условия на входе и выходе трубопровода, т.е. выполнить моделирование всего гидроагрегата.

Таким образом, расширение функциональных возможностей, например, пакета VisSim для исследования динамики (включая волновые процессы) широкого класса ГА с длинными трубопроводами возможно на базе создания специального вычислительного блока.

Но в связи с созданием специального вычислительного блока в пакете VisSim, предназначенного для математического моделирования волновых процессов в ГА, возникает необходимость решения ряда вопросов. Одним из первых вопросов следует оценка функционирования блока и точности расчета процесса с его помощью.

Представляет важную значимость и проблема представления переменных (фазовых координат ГА) в безразмерном виде при совместном решении обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений с безразмерной моделью трубопровода. В работах [5, 6] этот вопрос при исследовании динамических процессов ГА решается следующим образом: модель трубопровода представляется по одной системе безразмерных величин, а остальные уравнения ГА – по другой системе безразмерных величин. На границах трубопровода во время расчетного цикла производится пересчет безразмерных значений времени и давления. За базовые величины модели трубопровода приняты [5, 6]: для безразмерной координаты по оси трубопровода его длина; для безразмерного времени – отношение длины трубопровода к скорости звука; для безразмерного давления – произведение плотности, постоянного значения скорости

звука и базового значения скорости РЖ; для безразмерных скорости и площади – произвольные значения. В остальных уравнениях ГА базовые значения перемещения механических элементов, времени, давления и площади – другие (произвольные). Геометрические размеры такие как диаметр, зазор и т.п. остаются размерными и входят в состав безразмерных коэффициентов уравнений. Вопросом является необходимость сопряжения решений модели трубопровода в распределенных параметрах с модулями модели ГА на входе и выходе трубопровода, т.е. определение граничных условий. Согласно работам [5, 6] для определения граничных условий на входе в трубопровод выполняется совместное решение конечно–разностных уравнений для обратной характеристики и применительно к рассматриваемым ГА алгебраических уравнений. Для вычисления граничных условий на выходе трубопровода совместно решались конечно-разностные уравнения для прямой характеристики и сжимаемости РЖ. При использовании вычислительного блока вопрос граничных условий должен быть пересмотрен.

К числу вопросов следует отнести и определение рационального числа отрезков, на которые делится трубопровод для решения системы конечно-разностных уравнений модели трубопровода. В работе [1] отмечается, что достаточная точность расчета достигается при числе  $N=10$ .

Сформулированные вопросы необходимо решить в связи с моделированием волновых процессов ГА технологического оборудования при использовании специального вычислительного блока.

Настоящая статья посвящена описанию математической модели и структуре разработанного вычислительного блока к пакету VisSim для исследования неустановившихся течений вязкой, слабосжимаемой РЖ в длинном трубопроводе в составе объёмного гидроагрегата, для исследования динамики гидроагрегата в целом, включая и поставленные вопросы.

### **Решение**

Перейдём к построению математической модели вычислительного блока с учетом начальных и граничных условий на базе уравнений (3)–(7). Введем следующие безразмерные величины [3, 4]

$$x = \frac{x_T}{L}, \tau = \frac{C}{L}t, v_x = \frac{v_{cp}}{v_\delta}, p = \frac{p_T}{\rho C v_\delta},$$

$$\Psi = \frac{8\nu}{r_T^2} \frac{L}{C}, \varepsilon = \frac{\Psi}{2} \int_0^\tau \frac{\partial v_x}{\partial \tau_1} W^* [(\tau - \tau_1)] d\tau_1, \quad (8)$$

где  $v_\delta$  – произвольное базовое значение скорости;  $\Psi$  – безразмерное сопротивление трубопровода при установившемся движении;  $\varepsilon$  – потери, связанные с нестационарным трением;  $L$  – длина трубопровода.

С учетом безразмерных величин (8) уравнения (3) представляются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial \tau} + \frac{\partial p}{\partial x} + \psi v_x + \varepsilon &= 0, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \tau} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Умножая первое уравнение (9) на  $dx$ , второе на  $-d\tau$  и почленно складывая, получаем

$$\frac{\partial v_x}{\partial \tau} dx + \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial x} d\tau + \frac{\partial p}{\partial \tau} d\tau + (\psi v_x + \varepsilon) dx = 0. \quad (10)$$

С учетом

$$dx = d\tau \quad (11)$$

уравнение (10) сводится к виду

$$dv_x + dp + (\psi v_x + \varepsilon) dx = 0. \quad (12)$$

Переходя к конечным разностям уравнений (11) и (12), получаем конечно-разностные соотношения на характеристиках

$$\left. \begin{aligned} \Delta p \pm \Delta v_x + \psi v_x \Delta x + \varepsilon \Delta x &= 0, \\ \Delta x &= \pm \Delta \tau, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где знак „+” соответствует прямой характеристике (5), а знак „-” – обратной характеристике (7) и шаг разбиения трубопровода  $\Delta x$  равен временному шагу  $\Delta \tau$  при интегрировании.

Потери давления согласно работе [3] имеют разностное представление в виде

$$F_{i,k} = \frac{8 \rho v}{r_f^2} v_{x_{i,k}} + \frac{4 \rho v}{r_f^2} \cdot \sum_{j=1}^{k-1} (v_{x_{ij+1}} - v_{x_{ij-1}}) \cdot W^* ((k-j) \Delta \tau), \quad (14)$$

где  $W^*$  с достаточной для практики точностью аппроксимируется тремя экспонентами

$$W^* \approx W_{app}(\tau) = \sum_{k=1}^3 m_k e^{-n_k \tau}.$$

При выборе прямоугольной сетки с шагом по времени  $\Delta \tau$  для произвольной узловой точки по длине трубопровода имеем [1]

$$\left. \begin{aligned} 2p_{T_i}(\tau + \Delta \tau) &= p_{T_{i-1}}(\tau) + p_{T_{i+1}}(\tau) - [\xi_{i-1}(\tau) - \xi_{i+1}(\tau)] \Delta x + [v_{x_{i-1}}(\tau) - v_{x_{i+1}}(\tau)](1 - \psi \Delta x); \\ 2v_{x_i}(\tau + \Delta \tau) &= p_{T_{i-1}}(\tau) - p_{T_{i+1}}(\tau) - [\xi_{i-1}(\tau) + \xi_{i+1}(\tau)] \Delta x + [v_{x_{i-1}}(\tau) + v_{x_{i+1}}(\tau)](1 - \psi \Delta x); \\ \xi_i(\tau + \Delta \tau) &= \frac{\psi}{2} \sum_{k=1}^3 \xi_k(\tau + \Delta \tau), \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где  $i$  - порядковый номер узловой точки по оси  $X$ ; нестационарное трение представляется выражением

$$\left. \begin{aligned} \xi_k(\tau + \Delta \tau) &= \exp\left(-\frac{\psi m_k}{8} \Delta \tau\right) \xi_k(\tau) + m_k [v_{x_i}(\tau + \Delta \tau) - v_{x_i}(\tau)], \\ \text{где } m_1 &= 40, m_2 = 8.1, m_3 = 1, n_1 = 8000, n_2 = 200, n_3 = 26.4 [3]. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Итак, метод характеристик представляет собой метод временных шагов, в котором каждый следующий шаг подсчитывается с использованием результатов предыдущего временного шага.

Начальные и граничные условия давления  $p$  и скорости  $v$  жидкости на входе и выходе блока предусматривается задавать с помощью стандартных блоков пакета имитационного моделирования при изолированном исследовании динамических процессов в трубопроводе. Если исследуется вся модель гидроагрегата с трубопроводом, то начальные и граничные условия определяются модулями модели, набранными на стандартных блоках пакета, подключенными к входу и выходу трубопровода.

Программное обеспечение блока в соответствии с математической моделью (8)–(16) выполнено на языке программирования С.

Так как пакет разработчика VisSim SDK предназначен для компиляторов компаний Microsoft, Intel и Borland, то при написании кода программного обеспечения использовались интегрированная среда разработки Microsoft Visual Studio 2008 Express Edition и компилятор Microsoft Visual C++ 2008, которые свободно можно загрузить с официального сайта компании Microsoft.

Разработанное программное обеспечение блока представляет собой библиотечную программу, написанную согласно правилам создания блоков-расширений для пакета VisSim.

Принципы языка программирования С основаны на понятии функции, где функция – самостоятельная единица программы, созданная для решения конкретной задачи [7].

В соответствии с требованиями пакета разработчика VisSim SDK [8] к тексту программы код программного обеспечения созданного блока включает целый ряд функций, имеющих четкое назначение для решения поставленной задачи. Базовая функция Truba, разработанной библиотечной программы, выполняет основные вычисления и вызывается пакетом VisSim на каждом шаге моделирования. Функция TrubaSS предназначена для инициализации вычислительного процесса и вызывается пакетом VisSim на старте моделирования. Функция TrubaSE служит для освобождения ресурсов ПЭВМ после окончания вычислительного процесса и вызывается пакетом VisSim при завершении моделирования. Функция TrubaPA сообщает пакету VisSim о количестве параметров инициализации библиотечной программы и вызывается пакетом VisSim при создании блока. Функция TrubaPI задает значения параметров инициализации. Функция TrubaPC изменяет значения параметров инициализации библиотечной программы и вызывается при нажатии правой кнопки манипулятора типа «мышь» на разработанном блоке.

Для функционирования разработанного блока требуется: подключить заголовочный файл „VSUSER.H” к исходному коду программы и импортировать библиотеку „VISSIM32.LIB” из VisSim SDK к проекту разработанного программного обеспечения; скомпилировать исходный код программы в файл „TrubaZJLd.dll” (имя библиотеки значения не имеет) и подключить его к рабочему файлу пакета VisSim с помощью блока „userFunction”.

На рис. 1 изображено окно настроек созданного блока,

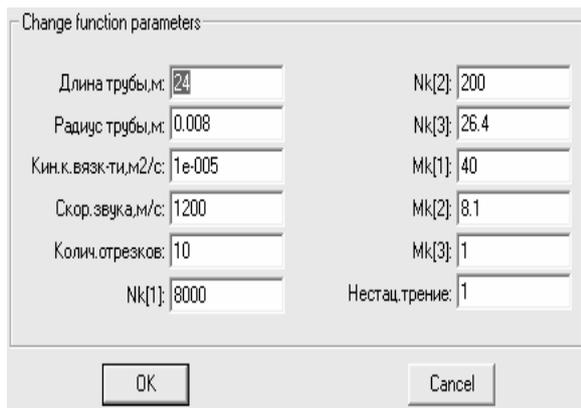


Рис. 1. Окно настроек специального вычислительного блока для пакета динамического моделирования VisSim

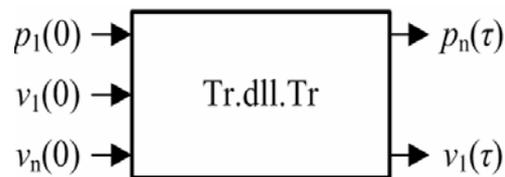


Рис. 2. Общий вид блока для пакета VisSim

позволяющее вводить следующие величины:

- длину трубопровода, м;
- радиус трубопровода, м;
- кинематический коэффициент вязкости РЖ,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;
- количество отрезков, на которые делится трубопровод;
- коэффициенты  $Nk(1)$ - $Nk(3)$ ,  $Mk(1)$ - $Mk(3)$  нестационарного трения, вызванного наличием жидкостного трения при неустановившемся течении РЖ (это коэффициенты второго слагаемого потери давления  $F(t)$ , характеризующего зависящую от частоты силу трения РЖ на стенке трубопровода [3, 4]);
- скорость звука  $C$  в РЖ, м/с;
- флаг включения в вычислительный процесс нестационарного трения („1” – включено, „0” – выключено).

Созданный функциональный блок показан на рис. 2.

На вход блока согласно программному обеспечению, основанному на методе характеристик, подаются: начальные безразмерные значения давления  $p_l(0)$ , скорости  $v_l(0)$ , определяемые начальными условиями исследуемого ГА (элементами ГА, расположенными до трубопровода) и начальное безразмерное значение скорости  $v_n(0)$  на выходе трубопровода. При переходном процессе все три входных переменных становятся функциями безразмерного времени  $\tau$ . С выхода блока поступает информация о вычисленном значении безразмерного давления  $p_n$  на выходе трубопровода как функция безразмерного времени  $\tau$ . При исследовании гидравлического удара и оценке прямых и отраженных волн представляет практический интерес изменение во времени безразмерной скорости  $v_l(\tau)$  РЖ в начальном сечении трубопровода. Функция  $v_l(\tau)$  для визуального удобства блока выведена на его выход (рис. 2).

Функционирование разработанного блока было проверено на известной решенной задаче гидравлического удара для случая, когда в начале трубопровода поддерживается постоянное давление  $p(1)=1$  (безразмерное значение), при скорости движения  $v(1)=1$  (безразмерное значение), а в конце трубопровода мгновенно происходит перекрытие:

$v(n)=0$ , при  $\tau > 0$ . Результаты расчетов колебаний давления  $p(n)$  на выходе трубопровода и скорости  $v(1)$  на входе трубопровода при наличии нестационарного трения ( $Z=1$ ) и его отсутствии ( $Z=0$ ) показаны на рис. 3.

В момент перекрытия трубопровода давление  $p(n)$  увеличивается до 2, а затем за счет потерь амплитуда колебаний уменьшается и по мере затухания достигает первоначального значения 1. Скорость  $v(1)$  от значения 1 с колебаниями относительно нулевого значения уменьшается с течением времени до нуля. Из сравнения кривых рис. 3а и 3б видно влияние нестационарного трения на затухание колебаний переменных  $p$  и  $v$ .

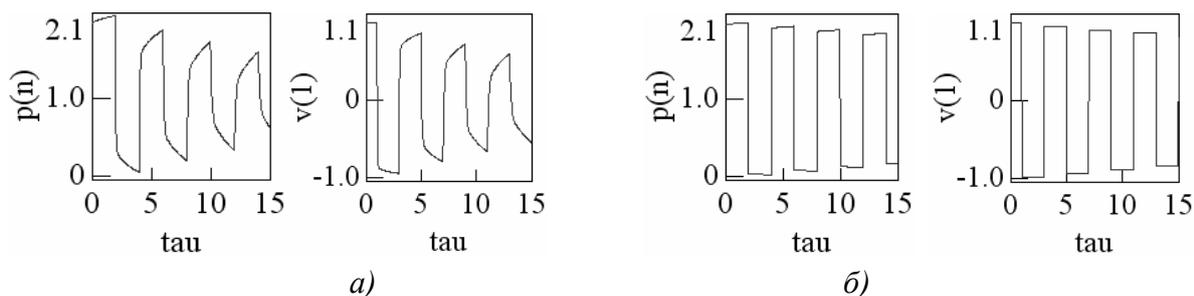


Рис. 3. Кривые колебаний давления  $p(n)$  и скорости  $v(1)$  при гидроударе: *a* – при  $Z=1$ ; *б* – при  $Z=0$

Кривые рис. 3а и рис. 3б получены при следующих данных:  $L=24$  м,  $r_T = 0.008$  м,  $\nu = 1 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $C = 1200 \text{ м}/\text{с}^2$ , число отрезков трубопровода – 10, параметры нестационарного трения  $n$  и  $m$  – согласно данным формулы (16).

Точность функционирования блока оценивалась по экспериментальным результатам с медным трубопроводом диаметром  $d_T=25.4$  мм, длиной  $L=36.1$  м, при кинематической вязкости масла  $\nu=0.397 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ , скорости распространения волны  $1324.4 \text{ м}/\text{с}$  [9]. На экспериментальной установке трубопровод был свернут в спираль диаметром 0.9 м и заделан в бетон для уменьшения колебаний, а выход соединен с баком емкости 227 л., в котором поддерживалось постоянное давление с помощью сжатого воздуха. Мгновенное перекрытие движения жидкости клапаном на входном конце трубопровода вызвало гидроудар. Волновой процесс давления регистрировался измерительным преобразователем, установленном на клапане.

Экспериментальная кривая, приведенная в работах [4, 9], была введена по точкам с разным шагом по безразмерному времени с помощью стандартного функционального блока (map) в пакет VisSim.

На рис. 4 показаны экспериментальная кривая безразмерных пульсаций перепада давления между выходом и входом трубопровода  $\Delta p_e(\tau)$  и расчетная кривая  $\Delta p_r(\tau)$  этого перепада, полученная на разработанном блоке, при тех же исходных данных. Сравнение близости кривых выполнялось с помощью следующей относительной интегральной оценки при  $\tau_k=14$

$$I = \int_0^{14} \left| \left| \Delta p_r(\tau) \right| - \left| \Delta p_e(\tau) \right| \right| d\tau \Bigg/ \int_0^{14} \left| \Delta p_e(\tau) \right| d\tau . \quad (17)$$

Модули переменных под знаком интегралов оценки (17) введены потому, что кривые  $\Delta p_e(\tau)$  и  $\Delta p_r(\tau)$  колебательны относительно нулевого значения. Значения  $I$  при  $N$  равном 10, 100 и 1000 соответственно равны 0,25; 0,14; 0,136. Относительная ошибка при  $N=100$  по отношению к значению при  $N=1000$  составляет

$$\delta = \frac{0,14 - 0,136}{0,136} \cdot 100\% = 2,94\%.$$

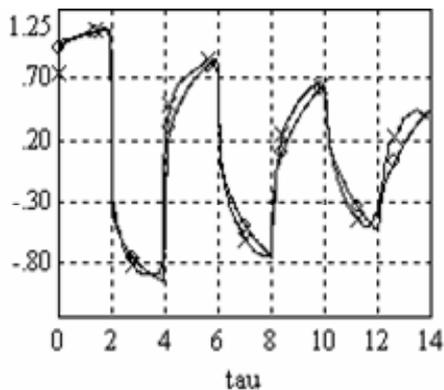


Рис. 4. Кривые пульсации перепада давления  $\Delta p = p_1 - p_n$  на трубопроводе при гидроударе:  $\times$  - расчетная кривая,  $o$  - экспериментальная кривая

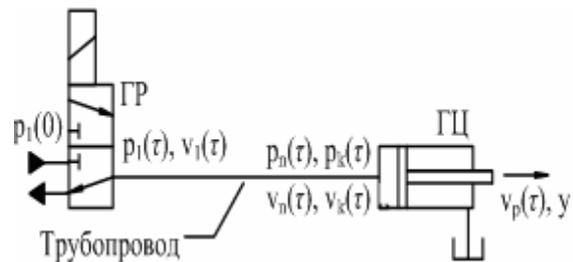


Рис. 5. Схема элементарного гидроагрегата с указанием параметров в узловых точках сетки: ГР – гидрораспределитель; ГЦ - гидроцилиндр;  $p_1(0)$  - давление РЖ в напорной линии;  $p_1(\tau)$ ,  $v_1(\tau)$  - безразмерные давление и скорость РЖ в первой узловой точке трубопровода;  $p_n(\tau)$ ,  $v_n(\tau)$  - безразмерные давление и скорость РЖ в последней узловой точке;  $p_k(\tau)$ ,  $v_k(\tau)$  - размерные давление и скорость РЖ в последней узловой точке сетки;  $v_p$ ,  $y$  - размерные скорость и перемещение поршня

Интегрирование уравнения (17) выполнялось методом Эйлера. Удовлетворительная точность расчетов, выполняемых программным обеспечением специального вычислительного блока, достигается при  $N=100$ , а также напрямую зависит от шага интегрирования и растет с увеличением числа отрезков, на которые делится трубопровод.

Рассмотрим моделирование волновых процессов в объемном ГА с применением специального вычислительного блока. На рис. 5 показана схема ГА, в котором количество РЖ в трубопроводе больше чем в полости гидродвигателя и кинетическая энергия РЖ превышает кинетическую энергию выходного звена с исполнительным механизмом во время движения. Шток ГЦ воздействует на исполнительный орган гидрофицированного механизма. Считаем, что гидрораспределитель (ГР) мгновенно соединяя напорный или сливной трубопровод с источником постоянного давления  $p_0$ , вызывает движение штока ГЦ.

$\Delta p$

При этом для достоверной оценки переходного процесса разгона ГА необходимо учитывать распределенность параметров трубопровода.

Математическая модель ГА (рис. 5) включает:

$$p_1(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{при } \tau < 0, \\ p_0, & \text{при } \tau \geq 0 \end{cases} \text{ - левое граничное условие;}$$

уравнения (9) трубопровода в безразмерных переменных;  
уравнения движения штока ГЦ (правое граничное условие)

$$m \frac{dv_p(t)}{dt} = A_p p_k(t) - \beta v_p(t), \quad (18)$$

$$v_p(t) = \frac{A_T}{A_p} v_k(t), y(t) = \int_0^t v_p(t) dt, \quad (19)$$

где  $A_T$  и  $A_p$  – соответственно площади поперечного сечения трубопровода и поршневой полости,  $m$  – приведенная к оси ГЦ масса подвижных элементов,  $\beta$  - коэффициент вязкого трения,  $v_p$  - скорость поршня,  $v_k$  - скорость движения РЖ на выходе трубопровода.

Численное решение уравнений (3) и их конечно-разностный безразмерный вид (15) и (16) на базе метода характеристик, выполняется с помощью разработанного блока. Представим остальную часть модели (уравнения (18), (19)) в безразмерном виде с теми же базовыми величинами ( $t_\delta = \frac{L}{C}$ ,  $v_\delta$ ,  $p_\delta = \rho C v_\delta$ ), что и безразмерная модель трубопровода

$$\frac{dv_n(\tau)}{d\tau} + K_1 v_n(\tau) = K_2 p_n(\tau), \quad (20)$$

$$v_p^*(\tau) = \frac{A_T}{A_p} v_n(\tau), \quad (21)$$

где  $K_1 = \frac{\beta t_\delta}{m}$ ,  $K_2 = \frac{A_p^2 \beta p_\delta t_\delta}{A_T v_\delta m}$  – безразмерные коэффициенты;  $p_n(\tau)$ ,  $v_n(\tau)$  – безразмерные

давление и скорость РЖ на выходе трубопровода;  $v_p^*$  - безразмерная скорость поршня.

Размерные значения давления и скорости РЖ на выходе трубопровода, скорости и перемещения поршня равны

$$p_k(\tau) = p_\delta p_n(\tau), v_k(\tau) = v_\delta v_n(\tau), \quad v_p(\tau) = \frac{A_T}{A_p} v_k(\tau) \quad \text{или} \quad v_p(\tau) = v_\delta v_p^*(\tau),$$

$y(\tau) = t_\delta \int_0^{\tau_k} v_p(\tau) d\tau$  и являются функциями безразмерного времени  $\tau$ . Отметим, что в

уравнениях (19) скорости  $v_p$  и  $v_k$  и перемещения  $y$  являются функциями времени  $t$ , а вся модель ГА представлена в безразмерном времени  $\tau$ . Поэтому для получения размерного  $y(\tau)$  введен множитель  $t_\delta$ .

На рис. 6а приведены: исходные данные трубопровода и ГЦ, значения коэффициентов  $K_1$  и  $K_2$ , принятые базовые значения давления  $p_\delta$ , скорость РЖ  $v_\delta$  и

времени  $t_\delta$ ; структурно-функциональная схема вычислительных блоков пакета VisSim и специального блока, соответствующая уравнениям модели ГА.

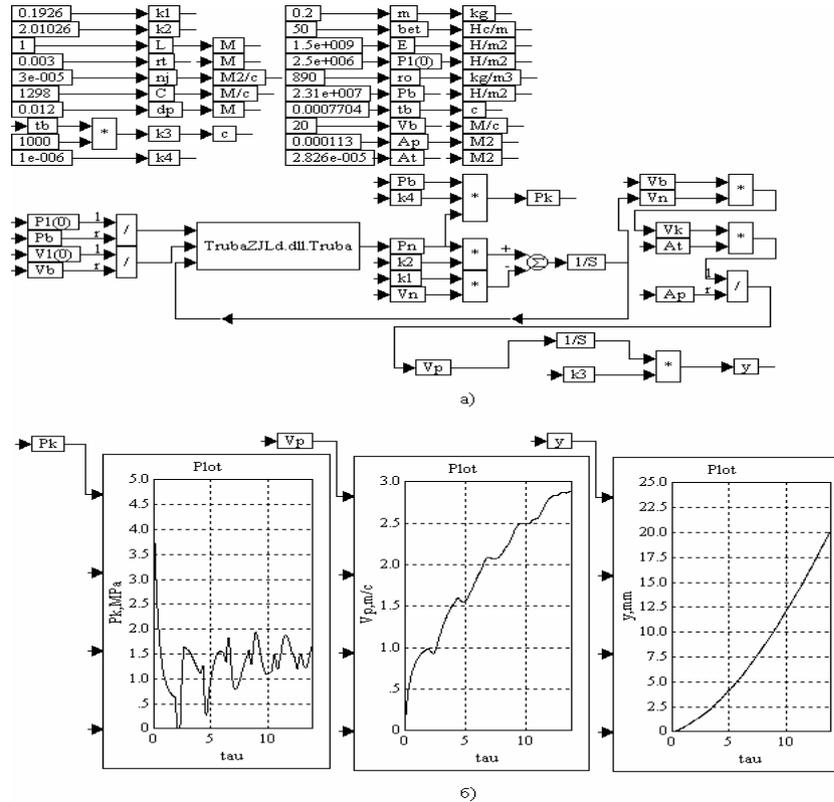


Рис. 6. Результаты расчета волновых процессов объемного ГА при единой системе безразмерных величин: а – исходные данные и расчетные коэффициенты; базовые значения давления и скорости РЖ, времени; б – осциллограммы  $p_k(\tau)$ ,  $v_p(\tau)$  и  $y(\tau)$

На вход спецблока подаются безразмерные значения давления  $p_1(0)$  и скорость  $v_1(0)$  равные 0.1082. Блоки, вычисляющие переходные процессы ГЦ, формируют граничные условия на выходе трубопровода и подают в модель спецблока значение безразмерной скорости  $v_n(\tau)$ . На выходе блоков  $p_k$ ,  $v_p$  и  $y$ , за счет умножения безразмерных переменных на базовые величины, получаем соответственно размерные значения давления РЖ, скорости и перемещения ГЦ. Переходные процессы  $p_k(\tau)$  в МПа,  $v_p(\tau)$  в м/с и  $y(\tau)$  в мм разгона ГА до значения  $y(\tau)=20$  мм изображены на рис. 6б. При этом  $\tau_k = 13.75$ , что соответствует времени  $t_k = 13.75 \cdot 0.7704 \cdot 10^{-3} = 10.6$  мс. Пик давления в начале движения составляет 4.5 МПа, а затем с амплитудой  $\sim 0.4$  МПа продолжается колебательный процесс. Нарастание скорости  $v_p$  происходит с небольшими колебаниями, которые совершенно отсутствуют в кривой перемещения  $y(\tau)$ . Решение получено при интегрировании методом Эйлера, шаге 0.001 с (число  $N$  деления трубопровода – 1000) при единой системе обезразмеривания параметров и без представления дифференциального (19) и интегрального (20) уравнений в конечно-разностном виде.

Представляет практическую значимость возможность сохранения уравнений модели ГА, кроме модели трубопровода, в размерном виде. Априори это должно выглядеть следующим образом: давление  $p_1(0)$ , скорость  $v_1(0)$  и скорость  $v_n$ ,

поступающие на вход спецблока, обезразмериваются, а давление  $p_n$  с выхода спецблока преобразовывается в размерную величину.

Так как в уравнениях (19) и (20) переменные  $v_p$  и  $y$  являются функциями времени, а вся модель ГА в пакете VisSim считается в безразмерном времени  $\tau$ , то значения скорости  $v_p(t)$  и перемещения поршня  $y(t)$  нужно умножить на базовое время  $t_\delta$ , т.е.  $t = t_\delta \cdot \tau$ . Переходные процессы  $p_k(\tau)$ ,  $v_p(\tau)$  и  $y(\tau)$ , полученные при таком подходе, полностью идентичны процессам, изображенным на рис. 6б.

### **Выводы**

С помощью разработанного вычислительного блока для пакета VisSim с достаточной для практики точностью решаются вопросы гидродинамики в трубопроводе с распределенными параметрами, что подтверждается сравнением расчетной и экспериментальной кривых пульсаций давления рабочей жидкости при гидроударе.

Получено, что число участков, на которое при моделировании можно разбить трубопровод, находится в широком диапазоне от 100 до 1000 и без существенного влияния на точность расчетов.

На примере моделирования объемного ГА с длинным трубопроводом показано, что модели его элементов могут быть в размерных величинах, кроме модели трубопровода. Тогда скорость и давление РЖ, поступающие на вход трубопровода, следует преобразовывать в безразмерные величины, а безразмерное давление с его выхода – в размерную величину. Все интегрируемые величины умножаются на базовое значение времени, так как модель ГА функционирует в безразмерном времени.

Начальные условия вводятся в блоки интеграторов, а граничными условиями являются уравнения на границах модели трубопровода, которые не требуется представлять в конечно-разностном виде.

### **Список литературы**

1. Скляревский О.М. Об'ємний гідропривід: Навчальний посібник. - Запоріжжя: ЗНТУ. – 2001. – 212 с.
2. Лурье З.Я., Скляревский А.Н., Татьков В.В. Волновые процессы в объемных гидроагрегатах и анализ методов их математического описания. // Вестник НТУ „ХПИ”. – 2005. - №28. – С. 105-116.
3. Трикса А.К. Эффективный метод моделирования зависящий от частоты силы трения в неустановившемся потоке жидкости // Теоретические основы инженерных расчетов. – 1975. - №1. – С. 207-214.
4. Зилке В. Трение, зависящее от частоты, при неустановившемся течении в трубопроводе // Теоретические основы инженерных расчетов. – 1968. - №1. – С. 120-127.
5. Скляревский А.Н., Денисенко А.И. К вопросу моделирования динамических процессов в электрогидравлическом следящем приводе с длинным гидроканалом. // Вибрация в технике и технологиях. – 2003. - №2(28). – С. 32-38.
6. Скляревский А.Н., Денисенко А.И. Динамика позиционного гидравлического следящего привода с длинными гидроканалами. // Промислова гідроліка і пневматика. – 2003. – №1. – С. 47-51.
7. Березин Б.И., Березин С.Б. Начальный курс С и С++. - М.: „ДИАЛОГ-МИФИ”, 2001. – 288 с.
8. Клиначёв Н.В. Моделирование систем в программе VisSim. - Справочная система. – Челябинск, 2001. – 212 файлов.
9. Холмбоу Е.Л., Руло В.Т. Влияние вязкого трения на распространение сигналов в гидравлических линиях. // Теоретические основы инженерных расчетов. – 1967. - №1. – С. 202-209.