

4. Рекомендовано заднюю поверхность каждого зуба сверла затачивать по двум цилиндрическим поверхностям, что обеспечивает получение выбранной величины угла наклона поперечной кромки  $\psi$ .

5. При больших диаметральных размерах шлифовального круга в зоне обработки задней поверхности исходная фасонная цилиндрическая поверхность мало отличается от фасонной поверхности шлифовального круга. Поэтому можно вести заточку сверла копированием без возвратно-поступательных движений сверла относительно шлифовального круга.

#### Список литературы

1. Родин П. Р. Геометрия режущей части спирального сверла. — К.: Техника, 1971.
2. 2.Родин П. Р., Филоненко С. Н., Змиевец В. Т. Рациональные способы заточки сверл. — Одесса: Научные записки ОПИ, 1960.

УДК 621.941.08

**В.Б. Струтинський<sup>1</sup>, д-р.техн.наук, проф., В.І. Сідорко<sup>2</sup>, д-р.техн.наук, с.н.с.  
В.М.Тихенк<sup>3</sup>, к.т.н., доц.**

**1—НТУ України «Київський політехнічний інститут», м. Київ, Україна;**

**2—Інститут надтвердих матеріалів ім. В.М. Бакуля НАН України, м. Київ, Україна;**

**3—Одеський державний політехнічний університет, м. Одеса, Україна**

### **ДИНАМІЧНІ ПОХИБКИ ПОЛОЖЕННЯ ШПИНДЕЛЯ БАГАТОКООРДИНАТНОГО ВЕРСТАТА ІЗ СКЛАДНИМ ПРОСТОРОВИМ РУХОМ ІНСТРУМЕНТУ**

---

*Рассмотрены особенности конструкции шпиндельных узлов многокоординатных станков, определены специфические силовые факторы, которые действуют на шпиндель при наличии пространственного движения инструмента. Разработана математическая модель динамических погрешностей шпинделя которые возникают в результате действия гироскопических моментов. Установлены закономерности динамических погрешностей при разных законах пространственного движения инструмента.*

*The features of construction of spindle knots of multico-ordinate machine-tools are considered, certainly specific power factors which operate on spindle at presence of spatial motion of instrument. The mathematical model of dynamic errors of spindle is developed which arise up as a result of action of gyroscopic moments. Conformities to the law of dynamic errors are set at the different laws of spatial motion of instrument.*

---

#### **Вступ**

Багатокоординатне металообробне обладнання широко використовується в сучасному виробництві. Воно має високу продуктивність і широкі функціональні можливості.

Розробка і дослідження багатокоординатного металообробного обладнання являє собою актуальну науково технічну проблему, яка має важливе значення для розвитку машинобудування.

В даний час розроблено і використовується різноманітне багатокоординатне металообробне обладнання [1]. Його впровадження є важливим науковим і практичним завданням розвитку машинобудування України. Реалізовано різні схеми багатокоординатного металообробного обладнання. Раціональним є схемне рішення в якому шпиндельний вузол встановлено у спеціальній поворотній фрезерувальній головці, що здійснює поворотні рухи в одній або двох площинах. Поворот шпинделя дає можливість здійснювати обробку просторових поверхонь різного виду. Поворот забезпечується спеціальними мехатронними системами керування [2].

Складна механічна система шпиндельної головки із взаємозалежними поворотними рухами має специфічні динамічні робочі процеси [3]. Вони пов'язані із виникненням значних гіроскопічних моментів при повороті обертового шпинделя. В літературних джерелах не виявлено даних про вплив гіроскопічних моментів на загальне динамічне навантаження шпинделя. Відсутні методи розрахунку шпиндельних вузлів, які навантажені гіроскопічними моментами.

В даній статті наведені результати досліджень впливу гіроскопічних моментів на показники динамічної жорсткості і точності шпиндельних вузлів багатокоординатного обладнання яке має поворотні фрезерувальні головки.

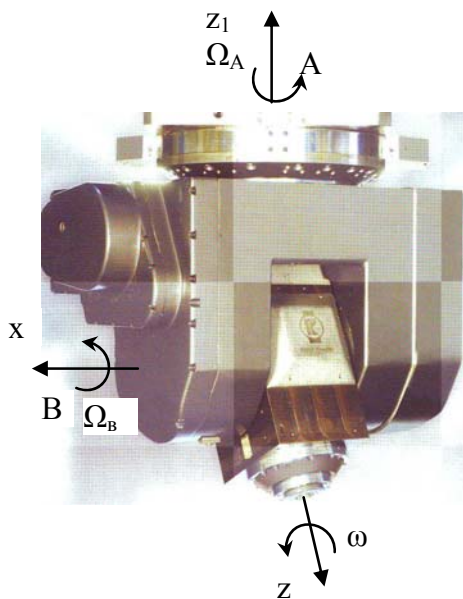


Рис. 1. Схема поворотних рухів фрезерувальної головки по координатах  $A$  і  $B$

### Особливості конструкції поворотної фрезерувальної головки та причини виникнення похибок положення шпинделя

Типова поворотна фрезерувальна головка (рис. 1) забезпечує поворот шпинделя в двох взаємно перпендикулярних площинах.

Поворотна головка включає масивні обертові деталі. Габаритні розміри головки сягають 500мм і більше, а її маса може досягати 200кг і більше.

Фрезерувальна головка має комплектний шпиндельний вузол. Частота обертання шпинделя як правило є високою  $\omega=10000\dots50000$  об/хв при потужності

електродвигуна 20...30кВт. В окремих випадках частота обертання шпинделя сягає  $\omega=100\dots250$  тис.об/хв.

Шпиндель, звичайно має вбудований електропривод головного руху та спеціальні підшипникові опори, що забезпечують необхідну статичну і динамічну точність його обертання.

Високообертовий шпиндель має значний кінетичний момент. Це приводить до виникнення великих гіроскопічних моментів в динамічній системі шпинделя. Дія гіроскопічних моментів при повороті фрезерувальної головки ілюструється схемою (рис. 2).

Поворот шпинделя по кутовій координаті  $A$  спричиняє виникнення гіроскопічного моменту  $M_{\Omega_A}$ . Даний момент пропорційний кутовій швидкості  $\Omega_A$  повороту шпинделя по координаті  $A_0$ .

При повороті шпинделя відносно вісі  $x$ , що відповідає кутовій координаті  $B$  на шпиндель діє гіроскопічний момент  $M_{\Omega_B}$ .

Величина моменту  $M_{\Omega_B}$  залежить від кутової швидкості  $\Omega_B$  повороту шпинделя.

Дія моментів  $M_{\Omega_A}$  і  $M_{\Omega_B}$  на шпиндель обумовлює його поворот в межах пружних деформацій опор шпинделя. Переміщення шпинделя відбувається в площині паралельній площині координат  $хоу$ . Переміщення інструменту  $\Delta_A$  і  $\Delta_B$  пропорційні гіроскопічним моментам  $M_{\Omega_A}$  і  $M_{\Omega_B}$ .

Загальне переміщення інструменту  $\Delta = \sqrt{\Delta_A^2 + \Delta_B^2}$ .

Дане переміщення є характерною похибкою багатокординатного верстата із складним просторовим рухом інструменту.

### Математична модель формування статичних і динамічних похибок положення шпинделя

Динамічні похибки положення шпинделя виникають внаслідок дії гіроскопічних моментів. На формування похибок впливають інерційні, дисипативні та деформативні параметри шпиндельного вузла. Для встановлення механізму формування статичних і динамічних похибок положення шпинделя розроблена його спрощена математична модель. Математична модель побудована для повороту шпинделя по одній із кутових координат (рис.3).

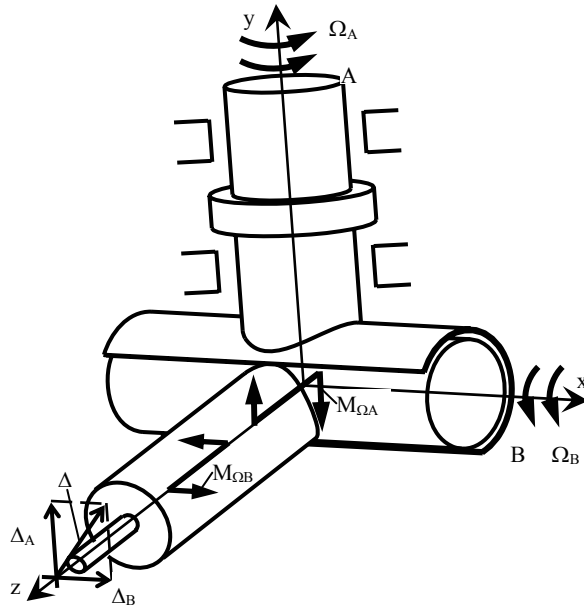


Рис. 2. Схема дії гіроскопічних моментів  $M_{\Omega_A}$  та  $M_{\Omega_B}$  на шпиндель та динамічні переміщення шпинделя  $\Delta_A$  та  $\Delta_B$  обумовлені дією гіроскопічних моментів

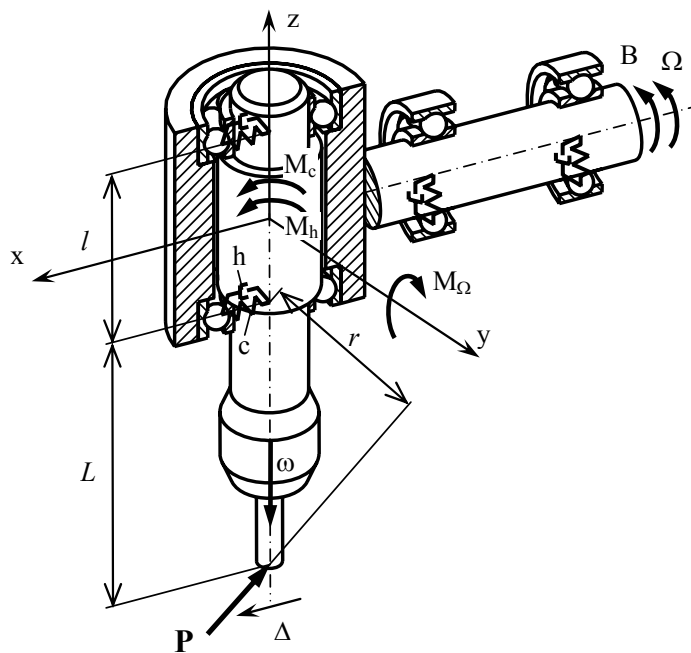


Рис. 3. Динамічна модель фрезерувальної головки при її переносному поворотному русі.

динаті  $B$  навколо вісі  $x$  із кутовою швидкістю  $\Omega$  на шпиндель верстата діє гіроскопічний момент  $M_{\Omega}$ , наближено рівний [4]

$$M_{\Omega} = K\Omega, \quad (1)$$

де  $K$  - кінетичний момент обертового шпинделя верстату.

$$K = I_3 \cdot \omega,$$

де  $I_3$  - момент інерції шпинделя;  $\omega$  - кутова швидкість обертання шпинделя.

Гіроскопічний момент врівноважується моментом реакції підшипників шпинделя. Момент діє в площині  $xz$  тобто вектор моменту колінеарний вісі  $y$ .

Підшипникові опори шпинделя характеризуються деякою жорсткістю  $c$  і коефіцієнтом опору  $h$ . Реактивний момент обумовлений деформацією опор пропорційний лінійному пружному переміщенню опори і дорівнює

$$M_c = -c\delta \cdot l = -cl^2\theta, \quad (2)$$

де  $\delta$  - переміщення шпинделя обумовлене пружною деформацією підшипникової опори;  $l$  - відстань між опорами шпинделя;  $\theta$  - кутове переміщення шпинделя в площині  $xz$ .

Реактивний момент обумовлений силами опору відповідно дорівнює

$$M_h = -h\dot{\delta}l = hl^2\dot{\theta}. \quad (3)$$

Складемо умову динамічної рівноваги шпинделя в площині  $xz$  у вигляді суми моментів усіх силових факторів які діють на шпиндель

$$I\ddot{\theta} = M_{\Omega} + M_c + M_h + M_p, \quad (4)$$

На шпиндель верстата діють різноманітні силові фактори. Зокрема це зусилля різання  $P$ , гравітаційні сили, сили обумовлені кінематичними збуреннями в підшипниках, відцентрові сили обумовлені обертанням шпинделя. Основним зовнішнім силовим фактором є зусилля різання.

Специфікою багатокординатного металообробного обладнання є наявність обертових переносних рухів в даному випадку повороту фрезерувальної головки.

При повороті фрезерувальної головки по коор-

де  $I$  – момент інерції шпинделя в площині  $xz$ ;  $M_p$  – момент від дії сил різання в площині  $xz$ .

Момент  $M_p$  визначається через силу різання  $P$  згідно залежності

$$M_p = rP, \quad (5)$$

де  $r$  – плече дії сили різання.

Підставивши значення величин згідно (1)–(3), (5) в рівняння рівноваги (4) одержимо

$$I\ddot{\theta} + hl^2\dot{\theta} + cl^2\theta = K\Omega + rP. \quad (6)$$

Дане рівняння визначає динамічні кутові переміщення шпинделя обумовлені дією сил різання та гіроскопічного моменту, що виникає при повороті фрезерувальної головки. Поперечно–кутові переміщення шпинделя приводять до відхилення інструмента від свого номінального положення.

Відхилення являє собою специфічну похибку верстата обумовлену переносним рухом шпинделя. В першому наближенні будемо вважати що поперечно-кутові переміщення відповідають повороту шпинделя навколо центральної вісі, яка проходить посередині між опорами. При цьому зміщення інструмента буде залежати від кута повороту згідно формули

$$\Delta = L \cdot \theta$$

Визначивши з даного співвідношення значення кута і підставивши його в рівняння (6) одержимо після перетворень

$$T^2 \ddot{\Delta} + 2\zeta T\dot{\Delta} + \Delta = K_{\Omega} \cdot \Omega + K_p P, \quad (7)$$

де значення коефіцієнтів

$$T = \sqrt{\frac{I}{cl^2}}, \quad \zeta = \frac{h}{2l} \sqrt{\frac{c}{I}}, \quad K_{\Omega} = \frac{KL}{cl^2}, \quad K_p = \frac{rL}{cl^2}. \quad (8)$$

### **Моделі формування складових статичних, перехідних і усталених похибок положення шпинделя**

Рівняння (7) визначає статичні і динамічні похибки положення шпинделя обумовлені дією на шпиндель гіроскопічних моментів. Статичні похибки, що виникають по причині повороту фрезерувальної головки мають місце при усталеному русі головки коли  $\dot{\Delta} = \ddot{\Delta} = 0$ . Відповідно із рівняння (7) із врахуванням (8) знайдемо величину статичної похибки  $\Delta_c$  обумовленої поворотом головки з постійною кутовою швидкістю  $\Omega_0$ .

$$\Delta_c = \frac{KL}{cl^2} \Omega_0 \quad (9)$$

Із даної формули випливає, що зменшення статичної похибки найбільш ефективно здійснити збільшенням відстані між опорами шпинделя.

Перехідні складові динамічних похибок обумовлені різкими змінами кутового положення фрезерувальної головки. Для визначення перехідних складових похибок приймемо зміну кутової швидкості у вигляді одиничної ступінчастої функції  $\Omega(t)=1(t)$ .

Відповідно для визначення похибки положення шпинделя приймаючи в (7) ( $P=0$ ) будемо мати диференціальне рівняння

$$T^2\ddot{\Delta} + 2\xi T\dot{\Delta} + \Delta = K_{\Omega} \cdot 1(t) \quad (10)$$

з початковими умовами при  $t=0$   $\Delta=\Delta_0$ ,  $\dot{\Delta}=V_0$ . Розв'язок рівняння (10) для ненульових початкових умов буде мати вигляд [5]

$$\Delta(t) = K_{\Omega} + \frac{\sqrt{T^2 V_0^2 + 2\xi T V_0 (\Delta_0 - K_{\Omega}) + (\Delta_0 - K_{\Omega})^2}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-\frac{\xi}{T} \cdot t} \times$$

$$\times \sin \left[ \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \cdot t + \arctg \left( \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi + \frac{T V_0}{\Delta_0 - K_{\Omega}}} \right) \right] \quad (11)$$

Для нульових початкових умов  $\Delta_0=V_0=0$  розв'язок рівняння (11) набуде вигляду :

$$\Delta(t) = K_{\Omega} \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-\frac{\xi}{T} \cdot t} \cdot \sin \left[ \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \cdot t + \arctg \sqrt{\frac{1}{\xi^2} - 1} \right] \right\}. \quad (12)$$

Залежність (11) визначає відхилення положення інструменту обумовлені поворотом шпиндельної головки. Це відхилення являє собою перехідну складову динамічної похибки положення шпинделя. Динамічна похибка залежить від параметрів шпинделя, які враховуються в значеннях постійних величин  $K_{\Omega}$ ,  $\xi$ ,  $T$  та початкових умов  $\Delta_0$   $V_0$ .

Статична похибка шпинделя визначається залежністю (9). Динамічна похибка визначається параметром  $\xi$  який залежить від пружно-дисипативних та інерційних властивостей динамічної системи шпинделя згідно співвідношень (8). Згідно [6] при значенні параметра  $\xi=0,4$  маємо динамічну похибку  $\Delta_d \approx 0,25 \Delta_c$ . При значенні параметра  $\xi=0,15$  динамічна похибка буде складати  $\Delta_d \approx 0,6 \Delta_c$ .

Функціональна залежність (11) являє собою символічну математичну модель, яка визначає статичну і динамічну похибку положення інструменту при різкій (ступінчастій) зміні кутової швидкості повороту фрезерувальної головки.

Динамічні усталені похибки шпинделя обумовлені плавними змінами кутового положення та кутової швидкості фрезерувальної головки. Вони відповідають гармонічним законам повороту головки. При цьому зміна кутового положення головки описується синусоїдальною залежністю

$$\Phi_s = \Phi_a \sin(\omega t) \quad (13)$$

де  $\Phi_a$  – амплітуда кутового переміщення;

$\omega$  – частота кутового переміщення головки.

Кутова швидкість і кутове прискорення також відповідають гармонічним функціям.

Кутова швидкість і кутове прискорення головки знайдене диференціюванням залежності (13)

$$\Omega_s = \Phi_a \omega \cdot \cos(\omega t), E_s = -\Phi_a \omega^2 \cdot \sin \omega t \quad (14)$$

Похибка при синусоїдальній зміні кутової швидкості (14) положення шпindelної головки визначаються частотними характеристиками динамічної системи шпинделя. Відповідно рівняння (7) амплітудно-частотна та фазо-частотна характеристики динамічної системи шпинделя знаходяться згідно залежностей [6].

$$W(\omega) = \frac{K_{\Omega}}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\xi^2 \omega^2 T^2}}, \quad \psi(\omega) = -\text{arctg}\left(\frac{2\xi\omega T}{1 - \omega^2 T^2}\right). \quad (15)$$

Максимальне збільшення амплітуди коливань шпинделя резонанс буде мати місце при  $\omega_p = \sqrt{1 - 2\xi^2} / T$  і складе

$$W(\omega_p) = \frac{K_{\Omega}}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}. \quad (16)$$

Дану частоту ( $\omega_p$ ) як резонансну необхідно виключати при формуванні законів поворотних рухів фрезерувальної головки.

Амплітудно-частотна характеристики  $W(\omega)$  визначає відношення амплітуди динамічної похибки  $\Delta_a$  і амплітуди зміни кутової швидкості головки  $\Omega_a = \Phi_a \omega$ . Відповідно значення амплітуди динамічної похибки складе

$$\Delta_a = \frac{K_{\Omega} \Phi_a \omega}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\xi^2 \omega^2 T^2}} \quad (17)$$

Загальна динамічна похибка положення шпинделя при його усталеному гармонічному русі буде відповідати наступній залежності

$$\Delta = \Delta_a \cos[\omega t + \psi(\omega)] \quad (18)$$

### **Типові закони повороту фрезерувальної головки та відповідні їм похибки положення шпинделя**

Динамічна похибка залежить від прийнятого закону зміни кутової швидкості переносного руху шпинделя в часі.

Закон зміни швидкості  $\Omega = \Omega(t)$  формується із умови забезпечення необхідного технологічного процесу обробки деталі на багатокординатному верстаті. При цьому використовуються деякі типові (основні) закони повороту фрезерувальної головки.

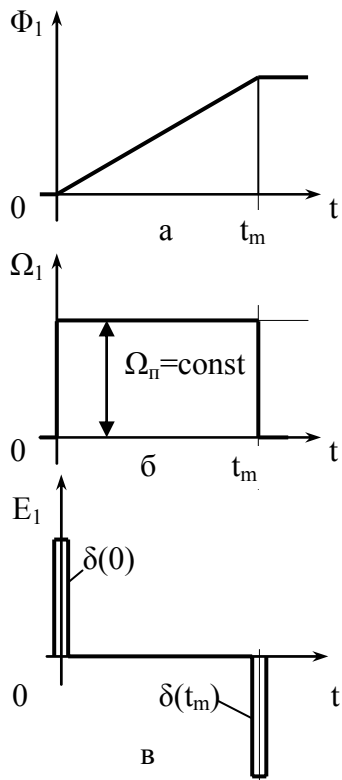


Рис. 4. Типовий різко змінний закон зміни кутової координати фрезерувальної головки

Характерним типовим законом є закон повороту головки з постійною кутовою швидкістю  $\Omega_n = \text{const}$  (рис.4).

Даний закон є різко змінним в часі, реалізується лише з певним наближенням. На початку і в кінці руху графік кутової швидкості має розриви і описується одиничною ступінчастою функцією (рис. 4. б). Кутове прискорення шпиндельної головки на початку і в кінці руху має особливості типу дельта функції Дирака (рис.4. в).

Для розрахунку динамічної похибки положення шпинделя на початку руху необхідно використати залежність (12), що відповідає нульовим початковим умовам. Розрахунок похибок після зупинки фрезерувальної головки здійснюється по формулі (11) із відповідними початковими умовами при  $t=t_m$ . Динамічна похибка положення шпинделя яка відповідає розглянутому закону повороту головки з постійною кутовою швидкістю об'єднує два перехідних процеси (рис.5)

Динамічні похибки положення шпинделя для даного закону повороту головки є суттєвими і складають 2...3 мкм. Загальна динамічна похибка може в 2..3 і більше разів перевищувати статичну похибку. Тому даний закон руху є нераціональним.

Іншим практично важливим законом повороту фрезерувальної головки є закон повороту із постійним значенням модуля кутового прискорення. Даний має ділянку рівноприскореного та сповільненого руху (рис.6).

Даний закон є оптимальний з точки зору мінімізації навантажень в динамічній системі повороту фрезерувальної головки.

Для розрахунку динамічної похибки положення шпинделя відповідної даному закону повороту головки виконано чисельне інтегрування рівняння (7). Результати розрахунків (рис.7) визначають статичну і динамічну похибку положення шпинделя на протязі процесу повороту фрезерувальної головки.

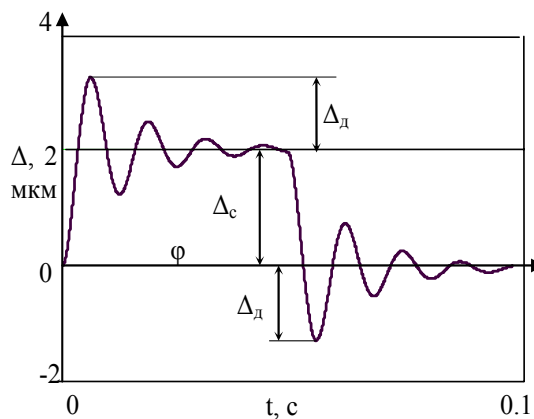


Рис.5 Динамічні похибки положення інструменту що мають місце при повороті фрезерувальної головки з постійною кутовою швидкістю



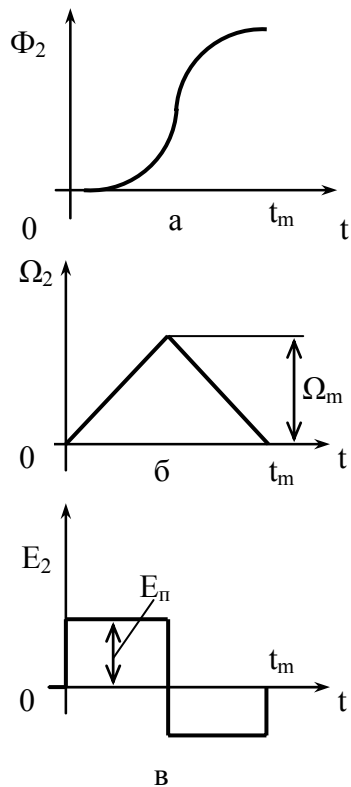


Рис.6. Типовий рівноприскорений закон руху фрезерувальної головки:  
 а – кутове переміщення головки; б – кутова швидкість;  
 в – кутове прискорення

Динамічні складові похибки  $\Delta_d$  для даного закону руху головки набагато менші від квазістатичних складових похибок  $\Delta_c$ . Тому даний закон є раціональним у відношенні зменшення динамічних похибок.

Загальним практично важливим типовим законом повороту фрезерувальної головки є полігармонічний закон. Згідно цього закону кутове переміщення головки є плавно змінним і визначається залежністю

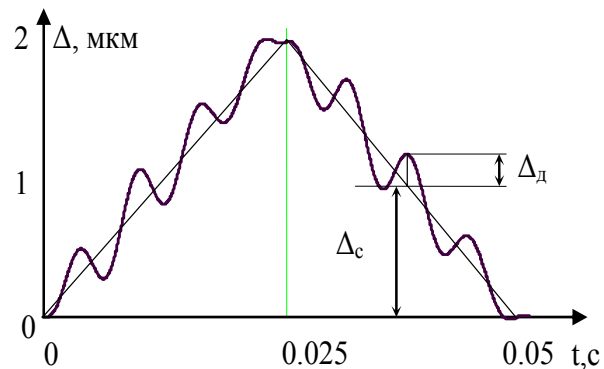


Рис. 7. Динамічна похибка положення інструменту при повороті фрезерувальної головки із постійним знакозмінним прискоренням.

$$\Phi_3 = \sum_{K=1}^N \Phi_K \sin(\omega_K t + \psi_K) \quad (19)$$

де  $\Phi_K$ ,  $\omega_K$ ,  $\psi_K$  – амплітуда, частота і початкова фаза  $K$ -ї гармоніки;  
 $N$  – загальне число гармонічних складових.

Кутова швидкість фрезерувальної головки відповідна даному закону визначається диференціюванням залежності (19) і складе

$$\Omega_3(t) = \sum_{K=1}^N \Phi_K \omega_K \cos(\omega_K t + \psi_K) \quad (20)$$

Кутова швидкість є входом динамічної системи шпинделя із частотними характеристиками визначеними залежностями (15). На основі принципу суперпозиції динамічна похибка положення інструменту визначиться формулою

$$\Delta_3(t) = \sum_{K=1}^N \frac{K_{\Omega} \Phi_K \omega_K}{\sqrt{(1 - \omega_K^2 T^2)^2 + 4\xi^2 \omega_K^2 T^2}} \times \cos \left[ \omega_K t + \psi_K - \arctg \left[ \frac{2\xi \omega_K T}{1 - \omega_K^2 T^2} \right] \right] \quad (21)$$

Конкретний полігармонічний закон повороту фрезерувальної головки, що відповідає залежності (20) і відповідна йому розрахункова динамічна похибка положення інструменту наведені на рис.8.

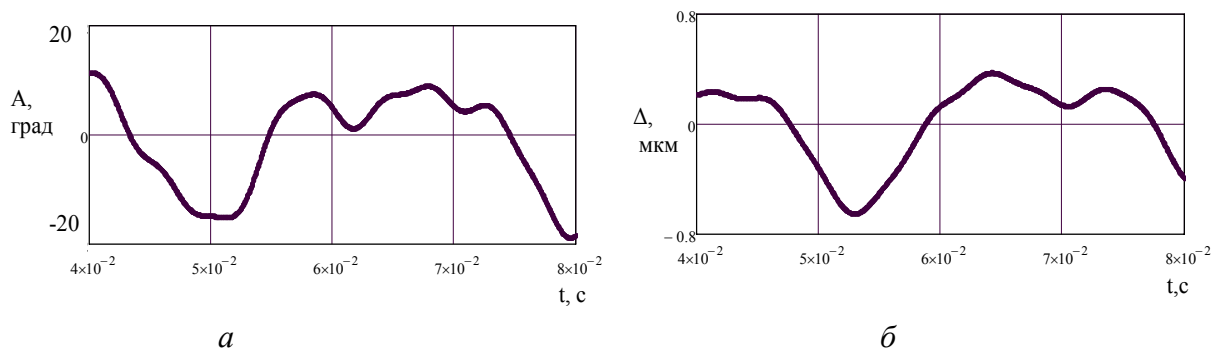


Рис. 8. Полігармонічний закон повороту фрезерувальної головки (а) та відповідні йому розрахункові похибки положення інструменту (б)

Із аналізу графіків випливає, що при змінах кутового положення головки в межах  $\pm 20^\circ$  максимальна динамічна похибка не перевищує 0,7 мкм. Загалом динамічні похибки при полігармонічному переміщенні фрезерувальної головки значно менші ніж при різких змінах кутового положення головки

### Висновки

1. Доведено, що багатокоординатні фрезерувальні верстати із поворотними фрезерувальними головками мають специфічні динамічні похибки положення інструменту обумовлені дією гіроскопічних моментів, які виникають при переносних поворотних рухах обертового шпинделя.

2. Для оцінки динамічних похибок може бути використане спрощене диференціальне рівняння, яке включає еквівалентні пружні, дисипативні та інерційні параметри шпинделя а своїм входом має гіроскопічний момент який в першому наближенні лінійно залежить від частоти обертання шпинделя.

3. Для оцінки точності положення шпинделя доцільно використовувати типові закони переміщення фрезерувальної головки у вигляді руху з постійною кутовою швидкістю, руху з постійним кутовим прискоренням та полігармонічного закону повороту головки.

4. Динамічні похибки положення шпинделя можуть досягати 60% від значення статичних похибок і складають 1..2мкм. Для зменшення динамічних похибок необхідно уникати резонансних складових в законах руху фрезерувальної головки.

5. Як напрямок подальших досліджень рекомендовано вивчення динамічних похибок при дії випадкових збурень в приводах повороту шпиндельної головки

### Список літератури

1. Крайнев А.Ф. Идеология конструирования. – М.: Машиностроение, 2003. – 384с.
2. Бушуев В.В. Практика конструирования машин. – М.: Машиностроение, 2006. – 448с.
3. Струтинський В.Б., Мельничук П.П. Математичне моделювання металорізальних верстатів. – Житомир: ЖДТУ, 2002. – 570с.
4. Павловський М.А. Теоретична механіка. – Київ: «Техніка», 2002. – 510с.
5. Струтинський В.Б. Математичне моделювання процесів та систем механіки. – Житомир: ЖДТУ, 2001. – 612с.
6. Бесекерський В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования, - М.: Наука, 1972. – 767с