

Я.І.Лавренко¹, асп., Й.Фішер², асп.

1 - НТУ України "Київський політехнічний інститут", м.Київ, Україна;

2 - Університет Отто-фон-Геріке, м. Мандебург, Німеччина

АНАЛІЗ ВПЛИВУ ЗСУВІВ НА ВЛАСНІ ЧАСТОТИ КОЛИВАНЬ ПЛАСТИН

Рассматриваются изгибные колебания плоских пластин, основанные на использовании теории тонких пластин и теории с учетом деформаций сдвига. Сопоставлены расчетные и экспериментальные результаты.

Bending plate vibration which is used in thin plate theory and shear deformation theory are viewed. Theoretical and experimental results compared.

Власні частоти коливань пластини визначаються шляхом розв'язку повної задачі на власні числа матриць жорсткості і мас, які формуються за допомогою метода скінчених елементів.

Динамічна поведінка системи описується наближено системою диференціальних рівнянь в інерціальній системі координат

$$[m]\{\ddot{D}\} + [c]\{\dot{D}\} + [k]\{D\} = \{F\}, \quad (1)$$

де $[k]$ - матриця жорсткості, $[c]$ - матриця демпфування, $[m]$ - матриця мас.

Розв'язок вище наведеного рівняння можна знайти у вигляді

$$\{D\} = \{\bar{D}\} \cdot e^{pt},$$

де $\{\bar{D}\}$ - амплітуда, що не залежить від часу.

В роботі були використані елементи Кірхгоффа і Міндліна, тому розглянемо їх більш детально.

Елемент Кірхгоффа

Елемент Кірхгоффа використовується для тонких пластин, в яких деформації зсуву не враховуються. Енергія деформації в пластині повністю визначається деформаціями ε_x , ε_y і γ_{xy} . В свою чергу, деформації повністю визначаються переміщеннями серединної поверхні $w = w(x, y)$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= u_{,x} = -zw_{,xx} \\ \varepsilon_y &= v_{,y} = -zw_{,yy} \\ \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} = -2zw_{,xy} \end{aligned} \quad (2)$$

Для розв'язку задачі було використано принцип мінімуму потенціальної енергії, тому для формування матриці жорсткості необхідно знайти енергію деформації елемента

$$U = \int_V \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} dV,$$

де
$$\{\varepsilon\}^T = \begin{bmatrix} -zw_{,xx} & -zw_{,yy} & -2zw_{,xy} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

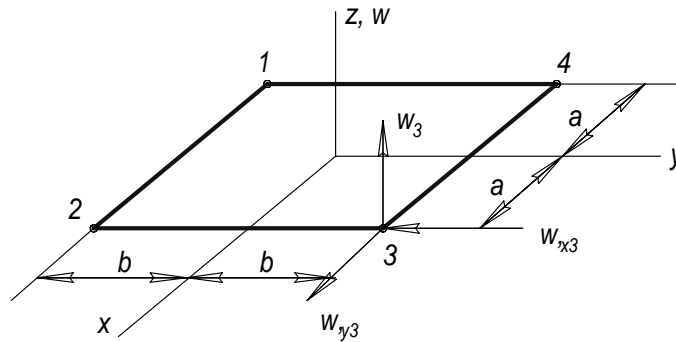


Рис.1 Прямокутний елемент Кірхгоффа з 12 ступенями свободи.

де $dV = dz \cdot dA$, а $dA = dx \cdot dy$ - елемент площі А. Визначаємо

$$U = \int_A \frac{1}{2} \{k\}^T [D_K] \{k\} dA,$$

де
$$\{k\}^T = \begin{bmatrix} w_{,xx} & w_{,yy} & 2w_{,xy} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$[D_K] = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 \\ \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)D/2 \end{bmatrix},$$

де
$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (5)$$

Для елемента, що має n вузлів

$$w = [N]\{d\}, \quad \text{відповідно} \quad \{k\} = [B]\{d\}, \quad (6)$$

де N – функція форми, $\{k\}$ – вектор кривизни, а $\{d\} = [w_1 \ w_{,x1} \ w_{,y1} \ \dots \ w_N \ w_{,xN} \ w_{,yN}]^T$.

Підставляючи (6) в (5), матриця жорсткості елемента матиме вигляд

$$U = \frac{1}{2} \{d\}^T [k]\{d\},$$

де
$$[k] = \int_A [B]^T [D_K] [B] dA \quad (7)$$

Наприклад, розглянемо прямокутний елемент з 12 ступенями свободи на рис.1. Для зображеної площини позначимо кути повороту вузла 3 у вигляді $w_{,x3}$ і $w_{,y3}$. Їх вектор показаний на рис.1. Переміщення цього елемента w записується у вигляді [2]

$$w = [1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, xy^3] \{a\}. \quad (8)$$

Цей елемент не забезпечує неперервності гранично-нормальних переміщень між елементами. Вектор $\{a\}$ містить дванадцять узагальнених координат.

Елемент Міндліна

Елемент Міндліна враховує деформацію згину і деформації зсуву. Він може застосовуватись як для аналізу товстих так і тонких пластин.

Типовий елемент Міндліна показаний на рис.2. Кожен вузол елемента має три степені свободи. Для формування матриці жорсткості необхідно знайти енергію деформації елемента U . A - є площею елемента,

$$U = \frac{1}{2} \int_{A-t/2}^{t/2} \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} dz dA, \quad (9)$$

де $\{\varepsilon\}^T = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}]$.

Знаходимо енергію деформації елемента

$$U = \frac{1}{2} \int_A \{k\}^T [D_M] \{k\} dA, \quad (10)$$

де $[D_M]$ і $\{k\}$ мають вигляд:

$$[D_M] = \begin{bmatrix} & 0 & 0 \\ [D_K]_{3 \times 3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{yz}t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{zx}t \end{bmatrix}, \quad \{k\} = \begin{Bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \\ \theta_y - w_{,y} \\ \theta_x - w_{,x} \end{Bmatrix}. \quad (11)$$

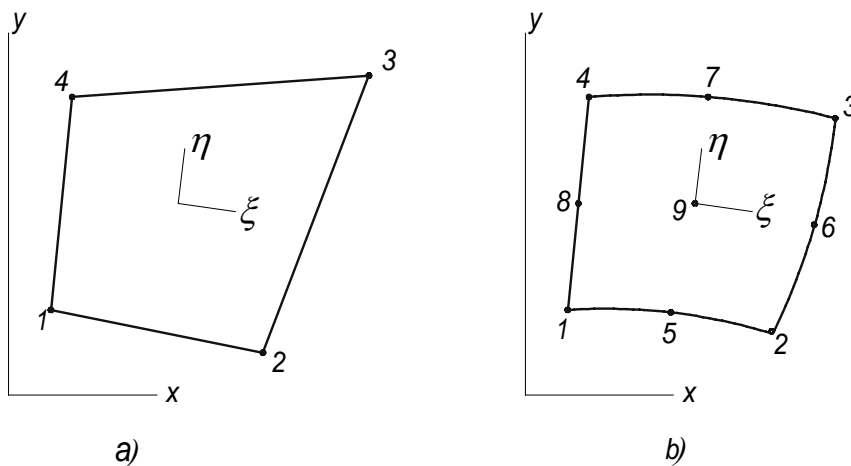


Рис.2. (а) Білінійний елемент. (б) Квадратичний елемент.

Ті ж самі функції форми використовуються для інтерполяції w , θ_x , θ_y :

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad \text{або} \quad \{u\} = [N] \{d\}, \quad (12)$$

де n - кількість вузлів, N_i - функції форми, і $\{d\} = [w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ \dots \ w_N \ \theta_{xN} \ \theta_{yN}]^T$.

Кривизна $\{k\}$ записується у вигляді

$$\{k\} = \begin{Bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \\ \theta_y - w_{,y} \\ \theta_x - w_{,x} \end{Bmatrix} = [\partial]\{u\},$$

де

$$[\partial] = \begin{bmatrix} 0 & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \\ -\partial/\partial y & 0 & 1 \\ -\partial/\partial x & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Враховуючи вирази (12) і (13), отримаємо

$$\{k\} = [B]\{d\},$$

де

$$[B] = [\partial][N] = \begin{bmatrix} 0 & N_{1,x} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & N_{1,y} & \dots \\ 0 & N_{1,y} & N_{1,x} & \dots \\ -N_{1,y} & 0 & N_1 & \dots \\ -N_{1,x} & N_1 & 0 & \dots \end{bmatrix} \quad (14)$$

Остаточно, з врахуванням (10) і (14):

$$U = \frac{1}{2} \{d\}^T [k] \{d\},$$

де

$$[k] = \int_A [B]^T [D_M] [B] dA \quad (15)$$

Якщо пластина прямокутна, то функції форми N_i можуть бути виражені в координатах x і y . Тоді $dA = dx dy$. Якщо елемент має вигляд, як показано на Рис.2, то N_i можуть бути виражені в ізопараметричних координатах ξ і η [3].

Відповідно для білінійних та квадратичних елементів, функції форми N_i даються у вигляді і таблиці

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \quad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \quad (16)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \quad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) - \frac{1}{2}(N_5 + N_8) - \frac{1}{4}N_9, \quad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) - \frac{1}{2}(N_5 + N_6) - \frac{1}{4}N_9,$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) - \frac{1}{2}(N_6 + N_7) - \frac{1}{4}N_9,$$

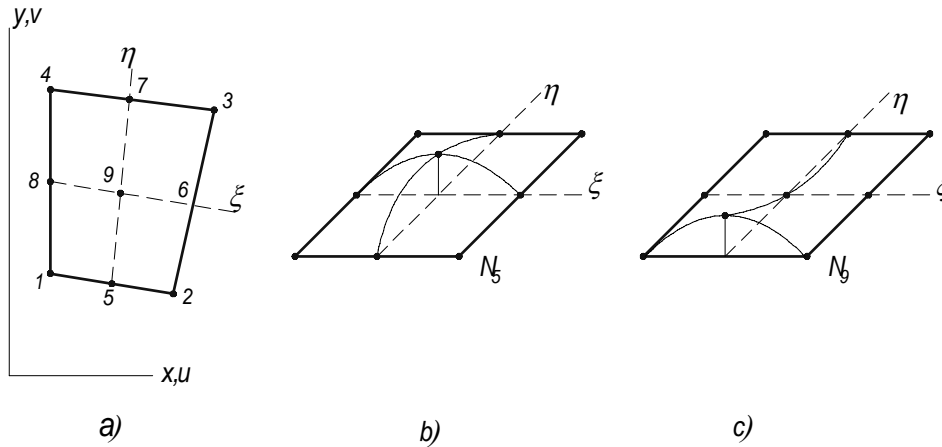


Рис.3. (а) Елемент Лагранжа з дев'ятьма вузлами в Декартових координатах. (b,c) Функції форми N_9 і N_5 , для квадратичних елементів в $\xi - \eta$ координатах.

$$\begin{aligned}
 N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) - \frac{1}{2}(N_7 + N_8) - \frac{1}{4}N_9 \\
 N_5 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) - \frac{1}{2}N_9, & N_6 &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) - \frac{1}{2}N_9 \\
 N_7 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) - \frac{1}{2}N_9, & N_8 &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2) - \frac{1}{2}N_9 \\
 N_9 &= (1-\xi^2)(1-\eta^2)
 \end{aligned} \tag{17}$$

Матриця мас

Матриця мас - дискретна апроксимація неперервного розподілу маси, і є симетричною. Коли ρ не дорівнює нулеві, матриця $[m]$ є додатньо визначеною

$$[m] = \int_{V_e} \rho [N]^T [N] dV \tag{18}$$

Результат визначення власних частот при використанні елементів Кірхгоффа і Міндліна перевірявся шляхом експериментальних досліджень. Як зразок, була використана прямокутна пластина, закріплення і розміри пластини показані на рис.5.

Переміщення кожної із 108 точок пластини визначались експериментально за допомогою лазера LMS LASER VIBROMETER Optical Sensor. Експеримент проводився в інституті механіки Отто-фон-Геріке Університету, Магдебург (Німеччина). Отримані данні оброблялись за допомогою спеціального програмного забезпечення LMS Test.Lab. Були визначені власні частоти коливань пластини.

Результати визначення власних частот коливань пластини знайдені теоретично і експериментально, і наведені у табл.1 та табл.2.

Таблиця 1.

Власні частоти, які отримані експериментально

№ частоти	1	2	3	4	5	6
Значення	7,5	16,5	35	59	93,5	101
№ частоти	7	8	9	10	11	12
Значення	135	143,5	197	225	246,5	249,5



Рис.4. Лазер LMS LASER VIBROMETER Optical Sensor

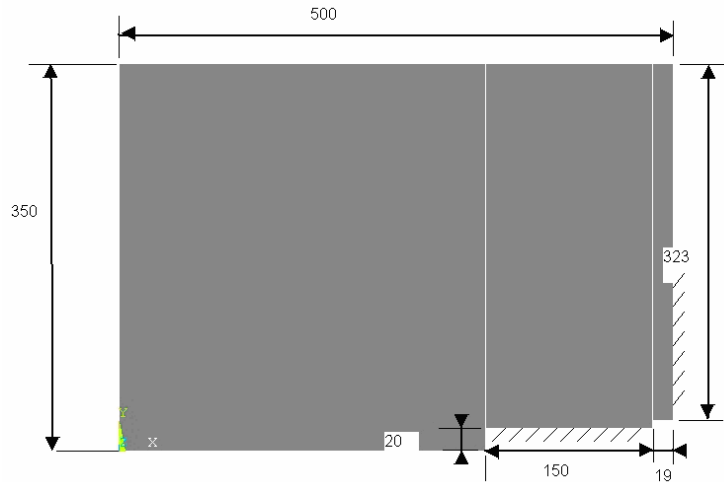


Рис.5. Розміри пластини, яка використовувалась для експерименту

Аналогічно, власні частоти на базі вказаних вище елементів визначались за допомогою програми “Ansys” та теоретично. Результати визначення власних частот співпали і наведені нижче:

Таблиця 2.

Власні частоти, які отримані аналітично

№ частоти	1	2	3	4	5	6
Значення	9.0168	16.880	35.732	61.576	94.985	108.77
№ частоти	7	8	9	10	11	12
Значення	128.19	146.09	191.77	248.13	256.66	270.30

Результати розрахунків як з використанням елементів Кірхгофа так і елементів Міндліна співпали. Це означає, що деформації зсуву можна не враховувати.

Результати визначення власних частот аналітичним і експериментальним шляхом показують, що на більшості форм має місце кореляція за винятком 1 і 6 власної частоти, де відхилення досить великі. Для того, щоб з’ясувати причину цих відхилень, планується також аналітично і експериментально визначити власні форми коливань, і їх аналіз дасть можливість визначити причини цих відхилень.

Список літератури

1. M.M. Hrabok and T.M. Hruđey "A review and Catalog of plate Bending Finite Elements", Computers & Structures, Vol. 19, No.3, 1984, pp. 479-495.
2. R.H. Gallagher, Finite Element Analysis: Fundamentals, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1975
3. J. Donea and L.G. Lamain, "A Modified Representation of Transverse Shear in C Quadrilateral Plate Elements," Comp. Meth. Appl. Mech Engng., Vol. 63, No.2, 1987, pp.183-207.