УДК 539.3

**А.Є. Бабенко, д-р техн. наук, проф., О.А. Боронко, д-р техн. наук, проф.,
С.Л. Бойко, канд. техн. наук. НТУ Украины «Киевский политехнический институт», г. Киев, Украина**

О НЕКОТОРЫХ ВАРИАНТАХ МЕТОДА ПОКООРДИНАТНОГО СПУСКА ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧАМ ВИБРАЦИИ

Стаття присвячена аналізу ефективності розроблених методів та алгоритмів, які предназначені для розв'язку динамічних задач механіки, виникаючи при розрахунку складних машинобудівних конструкцій, які являють собою стержневі просторові системи та багатозв'язані плоскі та трьохвимірні області.

В статті розглядаються три підхіда які використовуваються для мінімізації функціоналів для визначення власних частот та власних форм коливань елементів машинобудівних конструкцій – традиційний метод покоординатного спуску, метод підвищення жорсткостей та метод квазістатичних ітерацій. Наведені переваги кожного методу по зрівнянню з іншими та наведен тестовий приклад.

The Article is dedicated to developing and researching of effective methods and algorithms designated for solving dynamic problems of mechanics that arise when computing complex engineering designs such as bar-like spatial systems, multiply connected flat and three-dimensional region.

Three methods are reviewed in the article for defining natural frequencies and natural forms of oscillations of elements of engineering designs – traditional method of by-coordinates descent (покоординатный спуск), method of rigidities increment and method of quasi-statistical iterations. Advantages are shown for each of the methods taken in comparison with rest of the methods and test examples are listed.

Введение

При проектировании машиностроительных конструкций необходимость расчета на вибропрочность становится все более важной так как колебания возникающие в них могут влиять на долговечность.

Влияние механических колебаний очень существенно. Часто колебания создают прямую угрозу прочности весьма ответственным конструкциям, таким, как валы, турбинные лопатки, железнодорожные полотна и мосты, перекрытия промышленных зданий и т.п.; колебания которых приводили к авариям и катастрофам. В других случаях колебания способны нарушить нормальные условия эксплуатации таковы, например, вибрации станков, режущего инструмента, так как они ведут к снижению точности и чистоты обработки деталей или к поломке режущего инструмента. Поэтому, необходимо использовать теорию колебаний при проектировании конструкций, для отстройки рабочих режимов машин насколько это возможно, от критических.

Обширный класс механических объектов, которые используются в современном машино- и приборостроении, в ракетной и космической технике, а также в строительстве, представляют собой стержни, стержневые системы, массивные тела, многосвязные пластины и пространственные пластинчато-оболочечные конструкции, сочетающиеся в различных комбинациях. В процессе эксплуатации такие конструкции обычно подвергаются действию интенсивных динамических нагрузок. Это обусловливает появления в элементах конструкций больших циклических напряжений, нередко приводит к потере устойчивости, возникновению других сложных процессов, нежелательных с точки зрения динамической долговечности машин, приборов, аппаратов.

Анализ существующих методов

Расчет напряженно–деформированного состояния элементов машиностроительных конструкций при их вибрационном нагружении требует определения собственных частот и собственных форм колебаний. Задача определения собственных частот и форм колебаний является нелинейной. Существующие методы её решения основаны на решении обобщённой задачи на собственные числа матриц инерции и жёсткости, которые формируются методами конечных элементов (МКЭ) или методом конечных разностей (МКР) [1], [2].

Однако эти методы имеют определённые недостатки, так, например, МКЭ требует использования специальных методов оптимизации матриц жёсткости и инерции, что существенно усложняет алгоритм и скорость расчётов. Известно, что задача расчёта реальных конструкций численными методами сводится к системе с большим числом степеней свободы. Вследствие этого предпочтительно использовать итерационные методы, которые бы позволили частично избежать недостатков присущих МКЭ и МКР.

Таким образом, разработка и применение других универсальных методов и их теоретическое обоснование является актуальной проблемой.

Цель работы

Целью работы является разработка численных методов и создание универсальных, построенных на единой методологической основе алгоритмов и пакетов прикладных программ (ППП), обеспечивающих эффективное решение на ПЭВМ целых классов задач, с высоким уровнем автоматизации всего вычислительного процесса. С инженерной точки зрения это значает подход к построению системы автоматизированного проектирования различных машиностроительных конструкций. Реализация такой системы позволяет в значительной степени заменить эксперимент (что зачастую связано с большими затратами времени и средств) на оперативное численное моделирование и, в итоге, сократить сроки и повысить качество проектирования новых машиностроительных конструкций.

На основе разработанных методов созданы алгоритмы и пакеты прикладных программ (ППП), позволяющие решать задачу определения собственных частот и форм колебаний, которые в дальнейшем используются при решении задачи о вынужденных колебаниях. Рассмотрим реализованные три подхода.

Классический метод покоординатного спуска

В работе реализован подход базирующийся на построении и минимизации функционала типа Релея-Ритца для определения собственных форм и частот. Численное решение является устойчивым так как минимизация функционала осуществляется методом покоординатного спуска. Для определения первой собственной частоты в роботе используется известный метод Релея, который для нахождения первой частоты сводит задачу к минимизации функционала

$F(u)=\dfrac{(Au,u)}{(Bu,u)}$, где *(Au,u), (Bu,u)* - с точностью до постоянных являются потенциальной и кинетической энергиями упругой системы. Задача минимизации решалась с помощью метода покоординатного спуска [3]. Для определения более высоких собственных частот и соответствующих им собственных форм колебаний решалась задача минимизации на подпространстве ортогональном найденным собственным векторам. Для решения задачи минимизации бесконечномерное пространство заменяется конечномерным $V_h \in V$ и на нем определяется система перемещений U_h, которая доставляет минимум функционалу Релея-Ритца.

Метод повышения жесткостей

Первая форма и первая частота определяется минимизацией обычного функционала Релея-Ритца. Для определения более высоких форм строятся функционалы типа Релея-Ритца на основании использования спектральных свойств линейных операторов. Предложенный метод обладает преимуществами по сравнению с методами, основанными на использовании ортогональных свойств собственных форм, он устойчив, так как не используется процесс ортогонализации и требует меньшего количества арифметических операций при численной реализации. Рассмотрим предлагаемый метод более детально. Первую собственную частоту найдем путём минимизации отношения Релея-Ритца.

$$I(v)=\frac{(Ku,u)}{(Mu,u)}.$$

Для определения более высоких собственных частот и собственных форм применим метод повышения жесткостей. Данный метод заключается в том, что для определения собственной частоты к функционалу Релея прибавляется «добавка», определяемая проекторами, построенными на ранее найденных собственных векторах, и таким способом образуется новый функционал типа функционала Релея, для которого искомая частота является минимальной, этот функционал имеет вид:

$$R(u)=\frac{(Ku,u)+C(Mz_1,u)}{(Mu,u)},\ u\in R^N.$$

Тогда l-я собственная частота равна:

$$\omega_l^2=\min_{u\in R^N}\frac{(Ku,u)+C\sum_{k=1}^{l-1}(Mz_k,u)}{(Mu,u)}. \qquad (1)$$

Где коэффициент *C* должен заведомо превышать квадрат искомой частоты ω_l^2. Если коэффициент *C* выбран малым, то происходит «скатывание» к уже найденной форме. Это явление служит признаком того, что необходимо увеличить коэффициент *C*. Функционал с «добавкой» можно интерпретировать, с физической точки зрения, как образование новой механической системы. В этой новой системе жесткость в направлении ранее определённых собственных векторов увеличивается таким образом, что в направлении искомого собственного вектора жесткость оказывается минимальной. Для минимизации данного функционала примененяется метод покоординатного спуска.

Из отношения типа Релея (1) следует, что в процессе вычисления нет необходимости дополнительно строить проекторы, соответствующие найденным собственным векторам, а достаточно хранить в памяти ЭВМ лишь собственные вектора, что существенно упрощает его знаменатель. Это позволяет находить спектр собственных частот с меньшими вычислительными затратами по сравнению с традиционным подходом. Кроме этого, предложенный метод, является, по существу, методом нахождения минимума, и позволяет избежать процесса ортогонализации, который может быть неустойчивым.

Метод квазистатических итераций

Из вариационного принципа для свободных колебаний следует, что если характеристики движения изменяются периодически с частотой *ω*, то существует функционал:

$$\int_{t1}^{t2}\int_V L\left(x,u^k,u^k_{,t},u^k_{,i}\right)dVdt\,,$$

точки стационарности которого соответствуют действительным движениям тела, при заданных граничных условиях (например $u^k=0$ на ∂V).

Если в качестве промежутка времени взять один период $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$, то функционал примет вид:

$$\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}\int_V L\left(x,u^k,u^k_{,t},u^k_{,i}\right)dVdt\,,$$

при условии $u^k\left(x,-\dfrac{\pi}{\omega}\right)=u^k\left(x,\dfrac{\pi}{\omega}\right)$.

Если сделать замену $t\to\Theta,\quad \omega t=\Theta,\quad -\pi\le\Theta\le\pi$, то получим $\int_{-\pi}^{\pi}\int_V L\left(x,u^k,\omega u^k_{,t},u^k_{,i}\right)dVd\Theta$.

Если лагранжиан равен *L=K – U, где K≥0* – кинетическая энергия , *U≥0* – потенциальная энергия и *K* – однородная функция второй степени по $u^k_{,t}$, т.е. для любого *ω > 0*

$$K\left(x;u^k,\omega u_{,t}{}^k\right)=\omega^2K\left(x;u^k,u_{,t}{}^k\right).$$

Причем *K* и *U* строго выпуклы по совокупности своих аргументов и выполняется условие:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_V K\left(x,u^k,u^k_{,\Theta}\right)dVd\Theta=A^2\,,$$

где A – постоянная, то используя метод неопределенных множителей Лагранжа придём к функционалу

$$I = \int_{-\pi}^{\pi}\int_V U dV d\Theta - \lambda\left(\int_{-\pi}^{\pi}\int_V K dV d\Theta - A^2 \right),$$

где λ – множитель Лагранжа. Стационарная точка функционала имеет место при $\lambda = \omega^2$. Если $q = c\sin(\omega t + \varphi)$, то после интегрирования по времени функционал примет вид:

$$I = \int_V \overline{U} dV - \omega^2 \int_V \overline{K} dV,$$

где $\overline{U}$ и $\overline{K}$ - квадратичные формы:

$$\overline{U} = B(c,c) = \frac{1}{2}\sum_{S=1}^{N}\sum_{K=1}^{N} C_{SK} c_K c_S,$$

$$\overline{K} = K(c,c) = \frac{1}{2}\sum_{S=1}^{N}\sum_{K=1}^{N} A_{SK} c_K c_S,$$

и являются амплитудами потенциальной и кинетической энергий.

В работе итерационный процесс строится следующим образом: $\vec{c}^{\,k+1} = \vec{c}^{\,k} + \gamma_i^{k+1} e_i$, где $\vec{c}^{\,k}$ - вектор узловых неизвестных, $\vec{e}_i$ - единичный вектор в направлении $\vec{c}^{\,k}{}_i$, γ_i^{k+1} – шаг. Функционал в *k+1* приближении таким образом записывается в виде:

$$I^{k+1} = (Bc^{k+1}, c^{k+1}) - (K(\omega_1^{(1)})^2 c^k, c^{k+1}),$$

где $(\omega^k)^2 = \dfrac{B(c^k, c^k)}{K(c^k, c^k)}$, а $(\omega^k)^2 (Kc^k, e_i) = f_i^k$ – данная величина может быть истолкована как сила инерции, тогда функционал примет вид:

$$I^{k+1} = (Bc^k + \gamma_i^{k+1} e_i, c^k + \gamma_i^{k+1} e_i) - [\omega^{(k)}]^2 (Kc^k, c^k + \gamma^{k+1} e_i),$$

в результате функционал запишется в виде:

$$I^{k+1} = (Bc^k, c^k) + 2\gamma_i^{k+1}(Bc^k, e_i) + (\gamma_i^{k+1})^2 (Be_i, e_i) -$$
$$- [\omega^{(k)}]^2 (Kc^k, c^k) - \gamma_i^{k+1} [\omega^{(k)}]^2 (Kc^k, e_i)$$

Приращение функционала на *k+1* приближении равно

$$\Delta I^{k+1} = 2\gamma_i^{k+1}(Bc^k, e_i) + (\gamma_i^{k+1})^2 (Be_i, e_i) - \gamma_i^{k+1} [\omega_1^{(k)}]^2 (Kc^k, e_i)$$

Величина шага определяется из условия максимальной скорости уменьшения ΔI^{k+1}

$$\frac{\partial \Delta I^{k+1}}{\partial \gamma_i^{k+1}} = 0,$$

тогда $\quad 2(Bc^k, e_i) + 2\gamma_i^{k+1}(Be_i, e_i) - [\omega_1^{(k)}]^2 (Kc^k, e_i) = 0,$

отсюда величина шага определяется следующим соотношением

$$\gamma^{k+1} = -\frac{2(Bc^k, e_i) - [\omega_1^{(k)}]^2 (Kc^k, e_i)}{2(Be_i, e_i)} \ ,$$

Таким образом итерационный процесс упрощается и конечная формула для определения шага имеет туже структуру , что и для статической задачи. Вторая собственная форма колебаний и собственная частота определяются на подпространстве, ортогональном первой собственной форме колебаний. Вектор, ортогональный первой собственной форме колебаний определяется соотношением:

$$\vec{u}^k = \vec{c} - \left[\sum_{S=1}^{N} (Kc^k, c^k)\vec{c}^{(1)}\right],$$

где $\vec{c}^{(1)}$ - нормированный собственный вектор, соответствующий первой собственной частоте. Тогда величина шага при переходе к k+1 приближению запишется:

$$\gamma^{k+1} = -\frac{2(Bc^k, e_i) - [\omega_1^{(k)}]^2 (Kc^k, e_i) + [\omega_1^{(k)}]^2 (Kc^l, e_i)(Kc^k, c^{(l)})}{2(Be_i, e_i)},$$

аналогично определяется шаг при нахождении высших собственных частот и соответствующих им форм колебаний

$$\gamma^{k+1} = -\frac{2(Bc^k, e_i) - [\omega_1^{(k)}]^2 (Kc^k, e_i) + \sum_{l=1}^{M} [\omega_1^{(k)}]^2 (Kc^l, e_i)(Kc^k, c^{(l)})}{2(Be_i, e_i)}, \qquad (2)$$

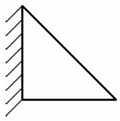
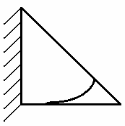
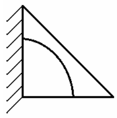
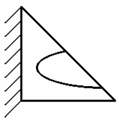
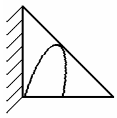
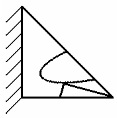
где $\left[\omega_e\right]^2$ квадрат круговой l-й собственной частоты, $c^{(l)}$ - l-я собственная форма колебаний, M - число определяемых собственных частот и соответствующих им собственных форм колебаний. Таким образом решая систему (2) и применяя отношение Релея-Ритца определяется необходимое число собственных частот и соответствующих им собственных форм колебаний.

Тестовый пример

В табл. 1. в числителе представлены приведенные собственные частоты пластинки, имеющей форму прямоугольного треугольника, а в знаменателе относительное время счета, а также приведены полученные значения частот по методу покоординатного спуска (МПС), методу повышения жесткостей (МПЖ) и квазистатическому методу (КСМ) и данные эксперимента. Количество узлов равнялось 83, треугольников 129. Ошибка в определении собственных частот не превышала 3%.

Таблица. 1.

Приведенные частоты $\widetilde{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$ пластинки, имеющей форму прямоугольного треугольника *NP*=83, *NE*=129

№ частоты	Узловые Линии	Эксперимент	МПС	МПЖ	КСМ
1.		4,17	4,35/1	4,42/1	4,32/0.1
2.		16,4	16,8/1	16,9/0.5	16,4/0.1
3.		23,0	23,0/1	23,7/0.6	23,0/0.1
4.		39,3	38,9/1	43,5/0.7	39,5/0.1
5.		53,3	53,4/1	53,4/0.6	53,4/0.1
6.		69,9	69,7/1	69,8/0.7	69,9/0.1

Выводы

Из трех предложенных методов наиболее эффективным является квазистатический метод, который позволил при одинаковой точности на порядок увеличить время счета задачи по сравнению с двумя предыдущими методами. Данный метод не требует решения квадратного уравнения при определении шага и удобен в численной реализации.

Список литературы

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир.- 1975.- 541 с.
2. Абовский Н. П., Андреев Н. П., Деруга А. П., Савченко В. И. Численные методы в теории упругости и теории оболочек: КГУ, 1986. - 367 с.
3. Бабенко А. Е, Бобырь Н. И., Бойко С. Л., Боронко О. А. Применение и развитие метода покоординатного спуска в задачах определения напряженно-деформированного состояния при статических и вибрационных нагрузках: Моногр.-К.: Инрес, 2005.-264 с.